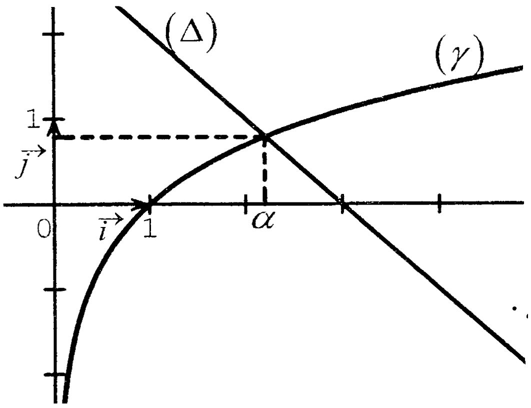
سلسلة حاقة للرياضيات

في رحاب الدوال اللوغاريتمية

BAC 2020

[مجموعة من التمارين المنتقاة والمتنوعة والهادفة]

(جميع الشعب العلمية)



- المحطة الأولى: ملخص للوحدة
- المحطة الثانية: حساب مشتق ونهايات بعض الدوال
- المحطة الثالثة: مسائل متنوعة منها بكالوريات جزائرية وأخرى أجنبية

BAC 2020 اجعل المستحيل ..ممكن

" إنما الأعمال العظيمة هي أعمال صغيرة كتب لها الاستمرار "

الأستاذ محمد حاقة
E mail: medhaga@gmail.com Tel : 0666948570

الإهــــــداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أبي الذي لم يبخل علي

يوماً بشيء

وإلى أمي التي زودتني بالحنان والمحبة

أقول لهم: أنتم وهبتموني الحياة والأمل والنشأة على

شغف الاطلاع والمعرفة وإلى إخوتي وزوجتي وأسرتي جميعاً

وإلى كل طالب علم يبحث عن المعرفة والتفوق

لا تنسوني بالدعاء

محبكم في الله

الأستاذ محمد حاقة

KING

جـــانفي 2020

بسم الله الرحمان الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذي جعل لنا من العلم نورا نهدي به و بعد...

أتقدم بهذه السلسلة – سلسلة حاقة للرياضيات – في رحاب الدوال اللوغاريتمية إلى طلبتي الأعزاء

و إلى كل من يجمعنا بهم رباط العلم من قراء و مدرسين فهذه السلسلة تحتوي على

- ✓ ملخـــص شامل ومبسط
- ✓ المحطـة الأولى: حساب نهايات ومشتق بعض الدوال
- ✓ المحطـة الثانية: تمارين متنوعة ومنتقاة لامتحانات سابقة جزائرية وأجنبية
- ✓ المحطـة الثالثة: حلول نموذجية لمجموعة من التمارين

وتركت بعضها دون حل وعليه أنصح الطالب بأخذ الوقت الكافي في التفكير فالمهم أن تأتي بالفكرة

وحدك الآن أو غدا فالوقت المخصص للتمرين هو اكتساب مهارة التفكير

نرجو من الأساتذة الكرام و كذلك إخواننا الطلبة أن لا تبخلوا علينا بملاحظاتكم و اقتراحاتكم البناءة

لنصوب أخطاءنا و نتفادى زلاتنا و نتلافى العيوب التي يمكن أننا ولا شك وقعنا فيها

و أسال الله عز و جل أن يوفقكم و يجعل النجاح حليفنا....

الأستاذ : مُحَمَّد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة

القبة القديمة – الجزائر

ملخص الدوال اللوغاريتمية

قليل من الصبر والإبداع يصنع موجة نجاحات إلى ما لانهاية

☒ يعالج هذا الملخص كل جوانب هذه الوحدة بطريقة مبسطة

1) **تعريف**: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية هي الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x$

2) **ملاحظة**: $\ln 1=0$ ، $\ln e=1$

$\ln x<0$ (سالب تماما) من أجل $0<x<1$ و $\ln x>0$ (موجب تماما) من أجل $x>1$

3) **قواعد الحساب**

أ/ العلاقة بين $\ln$ و e مثل العلاقة بين $\sqrt{\ }$ و"التربيع" معناه

$$\boxed{\blacktriangle=e^{\ln\blacktriangle}=\ln e^{\blacktriangle} \text{ حيث } \blacktriangle>0}$$

ب/ $\ln\blacktriangle=a$ تكافئ $\blacktriangle=e^{a}$

ج/ من أجل العددان الحقيقيان a و b الموجبان تماما و العدد الطبيعي n يكون

$$\boxed{\ln(ab)=\ln a+\ln b} \quad \text{و} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b}$$

د/ إذا كان $a.b>0$ و $\frac{a}{b}>0$ فان

$$\boxed{\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|} \quad \text{و} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|}$$

هـ/ $\boxed{\ln\frac{1}{a}=-\ln a}$ وبصفة عامة $\ln\frac{1}{\blacktriangle}=-\ln\blacktriangle$

و/ تحويل العبارة $\ln\left[u(x)\right]^{n}$: إذا كان n فردي فان $\ln\left[u(x)\right]^{n}=n\ln u(x)$

وإذا كان n زوجي فان $\ln\left[u(x)\right]^{n}=n\ln|u(x)|$

> وبصفة عامة $\ln\blacktriangle^{n}$: إذا كانت n فردية فان $\ln\blacktriangle^{n}=n\ln\blacktriangle$
>
> وإذا كانت n زوجية فان $\ln\blacktriangle^{n}=n\ln|\blacktriangle|$

ز/ $\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}\ln x$ و $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x$ وحالة خـــــاصة $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

4) ما يجب معرفته وفهمه لحل المعادلات و المتراجحات

إذا كـــانت	فــــــإن
$\ln u = \ln v$	$u = v$
$\ln\lvert u\rvert = \ln\lvert v\rvert$	$\lvert u\rvert = \lvert v\rvert$
$\ln u \le \ln v$	$u \le v$
$\ln u \ge 0$	$u \ge 1$
$\ln u \le 0$	$0 < u \le 1$

5) دراسة إشارة بعض العبارات

في كل ما يلي ، ترمز a ، b ، c ، α ، β إلى أعداد حقيقية

أ/ دراسة إشارة العبارة $a\ln(\alpha x+\beta)+b$ حيث $\alpha a \ne 0$

لدراسة إشارة العبارة $a\ln(\alpha x+\beta)+b$ على مجموعة تعريفها، نقوم بحل المعادلة $a\ln(\alpha x+\beta)+b=0$ بالطريقة التالية:

$$a\ln(\alpha x+\beta)+b=0 \Rightarrow \ln(\alpha x+\beta) = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha x+\beta = e^{-\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow \alpha x = e^{-\frac{b}{a}} - \beta \Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{-\frac{b}{a}}-\beta}{\alpha}}$$

ثم نحدد إشارتها كما في الجدول التالي:

x	الحل		
$a\ln(\alpha x+\beta)+b$	عكس إشارة αa	0	إشـــارة αa

ب/ دراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b(\ln x)+c$ حيث $a.b.c \ne 0$

لدراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b(\ln x)+c$ على المجال $]0;+\infty[$ ، نقوم بالخطوات التالية:

نضع $\boxed{\ln x = t}$ ، ثم نحل المعادلة $at^2+bt+c=0$ ، (نعين قيم t إذا قبلت حلول) ثم نستنتج قيم x ونشكل جدول ندرس فيه إشارة العبارة باستخدام القواعد المعروفة سابقا لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

ج/دراسة إشارة العبارة $\ln u(x)$ حيث؛ $u(x)>0$

إشارة $\ln u(x)$ من إشارة $u(x)-1$ داخل مجموعة التعريف

6) قوانين الاشتقاق

- ✓ إذا كان لدينا $f(x)=\ln x$ فان $f'(x)=\frac{1}{x}$ وبصفة عامة $f(x)=\ln \blacktriangle$ فان $f'(x)=\frac{\blacktriangle'}{\blacktriangle}$
- ✓ إذا كان لدينا $f(x)=\ln\left|x\right|$ فان $f'(x)=\frac{1}{x}$ وبصفة عامة $f(x)=\ln\left|\blacktriangle\right|$ فان $f'(x)=\frac{\blacktriangle'}{\blacktriangle}$
- ✓ إذا كان لدينا $f(x)=\ln\left[g(x)\right]^n$ فان $f'(x)=n.\frac{g'(x)}{g(x)}$
- ✓ إذا كان لدينا $f(x)=\ln\left[g(x).h(x)\right]$ فان $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{h'(x)}{h(x)}$
- ✓ إذا كان لدينا $f(x)=\ln\frac{g(x)}{h(x)}$ فان $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}-\frac{h'(x)}{h(x)}$

7) النهايات الشهيرة

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ وبصفة عامة $\ln 0^+=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ وبصفة عامة $\ln(+\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$ وأيضا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0^+$ وبصفة عامة $\lim\limits_{\blacktriangle\to+\infty}\frac{\ln\blacktriangle}{\blacktriangle^n}=0^+$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0^-$ وأيضا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^n\ln x=0^-$ وبصفة عامة $\lim\limits_{\blacktriangle\xrightarrow{>}0}\blacktriangle^n\ln\blacktriangle=0^-$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ وبصفة عامة $\lim\limits_{\blacktriangle\to0}\frac{\ln(1+\blacktriangle)}{\blacktriangle}=1$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ وبصفة عامة $\lim\limits_{\blacktriangle\to1}\frac{\ln\blacktriangle}{\blacktriangle-1}=1$

ملاحظة : مقلوب النهايتين الأخيرتين أيضا يساوي 1 بمعنى

$\lim\limits_{\blacktriangle\to0}\frac{\blacktriangle}{\ln(1+\blacktriangle)}=1$ و $\lim\limits_{\blacktriangle\to1}\frac{\blacktriangle-1}{\ln\blacktriangle}=1$

الجهد المتواصل وليس الذكاء أو القوة هو مفتاح إطلاق قدراتنا الكامنة

المحطة الأولى
حساب مشتق ونهايات الدوال اللوغاريتمية

$\ln 0^+ = -\infty$

1) $f(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$

أ/ نحسب النهايتين: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 + 1 - 2\ln x = 1 - 2\underbrace{\ln 0^+}_{-\infty} = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2+1}_{+\infty} - \underbrace{2\ln x}_{+\infty} = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 - 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right] = \boxed{+\infty}$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$$ ومنه $$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2-2}{x}}$$

2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}(1+2\ln x)$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$

أ/ حساب النهايتين: $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}(\underbrace{1+2\ln x}_{-\infty}) = 0 + (+\infty)(-\infty) = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}(\underbrace{1+2\ln x}_{+\infty}) = 0\times(+\infty)$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty} x + \frac{1+2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} + 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0} = \boxed{+\infty}$$

$(u.v)' = u'.v + v'.u$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)(1+2\ln x) + \frac{2}{x}\times\frac{1}{x} = 1 + \frac{-1-2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-1-2\ln x+2}{x^2}$$
$$= \frac{x^2+1-2\ln x}{x^2}$$

ومنه $$\boxed{f'(x) = \frac{x^2+1-2\ln x}{x^2}}$$

$\lim_{u \xrightarrow{>} 0} u\ln u = 0$

3) $f(x) = x + 3 - (x+2)\ln(x+2)$ معرفة على المجال $]-2;+\infty[$

أ/ حساب النهايتين: $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -2} \underbrace{x+3}_{1} - \underbrace{(x+2)\ln(x+2)}_{0} = \boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x+3}_{+\infty} - \underbrace{(x+2)\ln(x+2)}_{+\infty} = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{x+3}{x+2}}_{1} - \underbrace{\ln(x+2)}_{-\infty}\right] = (+\infty)(-\infty) = \boxed{-\infty}$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = 1-\ln(x+2) - \frac{1}{x+2}(x+2) = 1-\ln(x+2)-1 = -\ln(x+2)$$

ومنه $\boxed{f'(x) = -\ln(x+2)}$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$$

4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+3}$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$

أ/ حساب النهايتين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{\ln(x+1)}{x+3} = \dfrac{\ln 0^+}{2} = \dfrac{-\infty}{2} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+3} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+3}\times\frac{x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{0}\times\underbrace{\frac{x+1}{x+3}}_{1} = 0\times 1 = \boxed{0}$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x+3) - \ln(x+1)}{(x+3)^2} = \frac{\frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+3)^2} = \frac{\frac{x+3-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x+3-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+3)^2}$$

ومنه $\boxed{f'(x) = \dfrac{x+3-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)(x+3)^2}}$

5) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) + \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ معرفة على المجال $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

أ/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\dfrac{x-1}{x+2}}_{1}\right) + \ln\left(\underbrace{\dfrac{x}{x+2}}_{1}\right) = \boxed{1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\dfrac{x-1}{x+2}}_{1}\right) + \ln\left(\underbrace{\dfrac{x}{x+2}}_{1}\right) = \boxed{1}$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{-3}{{}^{-}0} + \ln\left(\frac{-2}{{}^{-}0}\right) = +\infty + \ln(+\infty) = +\infty + \infty = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\frac{x-1}{x+2}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{-1}{2} + \underbrace{\ln 0^+}_{-\infty} = \boxed{-\infty}$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{2}{x(x+2)} = \frac{3x+2(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{5x+4}{x(x+2)^2}$$ ومنه $$\boxed{f'(x) = \frac{5x+4}{x(x+2)^2}}$$

$$\left(\ln\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

6) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1} + \ln(x-1)$ معرفة على المجال $]1;+\infty[$

أ/ حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{2} + \underbrace{\ln(x-1)}_{+\infty} = 2+\infty = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) = \frac{+2}{^+0} + \ln 0^+ = +\infty - \infty$$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{2x}{x-1} + \ln(x-1) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{2x + \overbrace{(x-1)\ln(x-1)}^{0}}{x-1} = \frac{+2}{^+0} = \boxed{+\infty}$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{-2+(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-3}{(x-1)^2}$$ ومنه $$\boxed{f'(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}}$$

7) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2|$ معرفة على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

أ/ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2-4x+3+\ln|x-2| = +\infty + \underbrace{\ln|-\infty|}_{=+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-4x+3+\ln|x-2| = +\infty$$

$$\left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -1 + \underbrace{\ln 0^+}_{=-\infty} = -\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = 2x-4+\frac{1}{x-2} = \frac{(2x-4)(x-2)+1}{x-2} = \frac{2x^2-8x+9}{x-2}$$ ومنه $$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2-8x+9}{x-2}}$$

$$\ln x^2 = 2\ln|x|$$

8) $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x^2}{x}$ معرفة على المجال $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

(ملحوظة:النقطة $(0;1)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f ومنه $f(-x)+f(x)=2$)

أ/ نحسب النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln\left|x\right|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0} = \boxed{1}$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} 1-\frac{\ln x^2}{x} = 1-\frac{\ln 0^+}{{}^+0} = 1-\frac{-\infty}{{}^+0} = \boxed{+\infty}$$

أما النهايتين عند $-\infty$ والصفر بقيم صغرى يمكن استنتاجها باستخدام قانون مركز التناظر

لدينا: $f(-x)+f(x)=2$ ومنه $f(x)=2-f(-x)$ ومنه

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(-x) = \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-f(-x)) = \lim_{t\to+\infty}(2-\underbrace{f(t)}_{1}) = 2-1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{<}0}(2-f(-x)) = \lim_{t\xrightarrow{>}0}(2-\underbrace{f(t)}_{+\infty}) = 2-1 = 2-\infty = \boxed{-\infty}$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = 0-\frac{\frac{2}{x}.x-\ln x^2}{x^2} = \frac{-2+\ln x^2}{x^2} \text{ ومنه } \boxed{f(x)=\frac{-2+\ln x^2}{x^2}}$$

9) $f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$

أ/ حساب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x-\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x-\frac{\ln x}{x^2} = \ln 0^+ - \frac{\ln 0^+}{{}^+0} = -\infty+\infty$ وهي حالة عدم التعيين، إزالتها

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} \underbrace{\ln x}_{=-\infty}\left(\underbrace{1-\frac{1}{x^2}}_{=-\infty}\right) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$$

ب/ حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln x}{x^4} = \frac{1}{x}-\frac{x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x+2x\ln x}{x^4} = \frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}$$

ومنه $\boxed{f'(x)=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+3}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين ،

إزالتها: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left[2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{3}{x}\right]}{x\left[1-\dfrac{1}{x}\right]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{0}{1}=\boxed{0}$

المحطة الثانية

مسائل متنوعة منها بكالوريات جزائرية وأخرى أجنبية

التمرين الأول

$I-$ f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$ (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب: $f(-x)+f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ثم استنتج النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ ، و فسر النتائج هندسياً.

3) أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات f

4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta):y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما

5) بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$

6) أكتب معادلة المماس (d) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

7) أثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتها،

ثم أوجد معادلة للمماس (T).

8) أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)

9) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

$II-$ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$ ، (C_h) منحناها البياني

1) بين أن h دالة زوجية **2)** دون دراسة تغيرات الدالة h ، ارسم (C_h)، معللاً إجابتك

التمرين الثاني

$I-$ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\ln(1+e^x)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)=x+\ln(1+e^{-x})$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ ،ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

3) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (C) مع (Δ)

5) أحسب $h(0)$ ،فسر النتيجة هندسيا ثم أرسم (C)

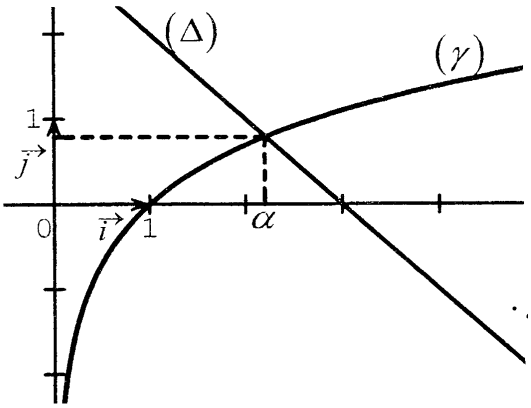
$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(1+e^{-|x|}\right)$ ، (C_f) منحناها البياني

1) برهن أن $f(x)=h(x)$ على مجال يطلب تعيينه 2) بين أن f دالة زوجية

3) اشرح كيف يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C)، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

4) عين بيانيا، قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-m$ حلين مختلفين في الإشارة

التمرين الثالث: المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



I. (γ) التمثيل البياني للدالة $x\to\ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ)

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) على $]0;+\infty[$

2) g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$

✓ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقق أن: $2{,}2<\alpha<2{,}3$

II. f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أثبت أنه من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ، ثم أنشئ (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$

التمرين الرابع:

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-x\ln x$

1) أ/أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن للمعادلة $g(x)=-1$ حلا وحيدا α حيث $3{,}5<\alpha<3{,}6$

3) استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$

II– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$

1) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

د/ احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسر النتيجة هندسيا

أ/ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$ ب/ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ج/ ارسم (C_f)

3) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)...(E)$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x-m$

ب/ عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي

أ/ بين أن الدالة h زوجية ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

التمرين الخامس: f الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$؛ $f(x)=1+x\ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

ب/ عين إشارة $f''(x)$ ، ثم استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-0,6;-0,5[$ بحيث $f'(\alpha)=0$

2) أدرس تغيرات الدالة f

3) بين أن: $f(\alpha)=1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$، استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_a)، (T_b) يمران من المبدأ ،يطلب تعيين معادلتيهما

5) ارسم المماسين (T_a)، (T_b) و (C_f)

التمرين السادس

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)$ (C_f) منحناها البياني

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

ب/ بين أنّ f' مشتقة الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ج/ بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,6<\alpha<0,7$

3) أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x;2)$ مع $x\geq 1$

ب/ حل المعادلة $x^2.g'(x)-2x.g(x)=0$ ، ثم بين أن $B\left(e;e+\frac{3}{e}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ج/ أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

التمرين السابع

f دالة معرفة على المجال: $D_f=]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $1cm$)

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

ب/ عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات الفاصلة 2

3) g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ/ بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $\frac{x+1}{x} > 1$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

ب/ احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. ماذا تستنتج ؟

ج/ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحى (C)

د/ ارسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد وإشارة حلول المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = 0$

التمرين الثامن

$I-$ g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

$II-$ f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ج/استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$

3) ارسم كلا من (Δ) و (C_f) على المجال $]0;4[$

التمرين التاسع

نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]0;e[\cup]e;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

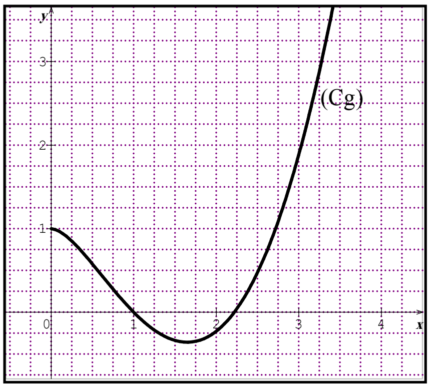
$I-$1) احسب نهايات الدالة f مفسرا النتائج هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من I : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

ب/ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

$II-$ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني كما في الشكل المقابل



1)أ/ حدد بيانيا عدد حلول المعادلة: $g(x)=0$

ب/ يعطى جدول القيم التالي:

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]2,1;+\infty[$ وبالاستعانة بالجدول أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}

2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من I : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

ب/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيينهما

ج/ حدد انطلاقا من (C_g) اشارة $g(x)$ على المجال $]1;\alpha[$ ، ثم بين أن $f(x)-x<0$ على المجال $]1;\alpha[$

3)ارسم (Δ) المنحنى (C_f)

التمرين العاشر

$I-$ g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,72;-0,71[$

3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ f دالة معرفة على المجال $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسر النتيجتين هندسيا

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ، ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ بأخذ: $\alpha\approx -0,715$

4) أنشئ (C_f)

التمرين الحادي عشر

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

2) أ/أحسب $g(1)$ ثم استنتج أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ؛ $g(x)\geq 0$

ب/ استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\leq \dfrac{x}{2}-1 ...(*)$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة بـ $f(0)=-2$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=x^2-2-2x\ln x$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f وبالنسبة للمنحنى (C_f)؟

ج/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=2g(x)$

ب/ استنتج اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها، ماذا تستنتج؟

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_1 حيث: $2<x_1<3$

4) بين أن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2 هي $y=2(1-\ln 2)x-2$

5) باستعمال العلاقة $(*)$ حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

6) أنشئ (Δ) و (C_f)

التمرين الثاني عشر

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$

1) احسب: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أحسب $g'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $g(x)\geq\dfrac{1}{2}$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\ln x}{x}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{1+g(x)}{x^2}$

2) أدرس تغيرات الدالة f

3) بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (D)

5) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

6) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ميله يساوي $\dfrac{1}{2}$

ب/ أكتب معادلة (Δ)

7) أثبت أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_1 حيث: $\dfrac{1}{2}<x_1<1$

8) أنشئ (Δ) و (C_f) (تؤخذ $2\,cm$ وحدة للطول)

9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$

التمرين الثالث عشر

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,8<\alpha<1,9$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=4$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

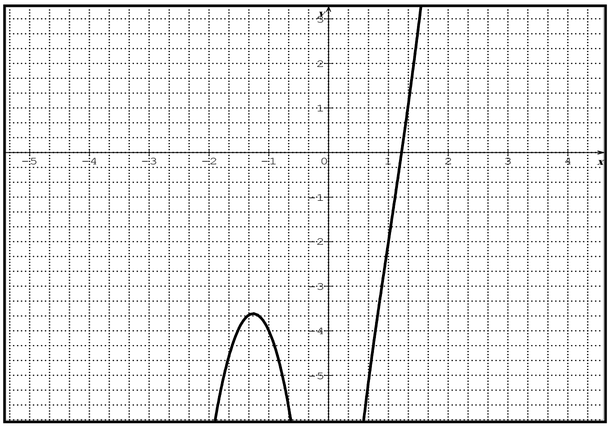
4) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;+\infty[$ ، $0\le f(x)\le\dfrac{\ln x}{x^2}$. ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم احصر للعدد $f(\alpha)$

6) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، وارسم المنحنى (C_f)

التمرين الرابع عشر

$I-$ المنحنى المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x) = x^3 - 3 + 6\ln|x|$



1) بقراءة بيانية

أ/ شكل جدول تغيرات g

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,21 < \alpha < 1,22$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

$II-$ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - 3\dfrac{\ln|x|}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، وفسر النتيجة الأخيرة بيانياً

2)أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن: $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha - \dfrac{3}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$

4) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

5) أ/ بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، ويمس (C_f) في نقطتين، يطلب إعطاء معادلة المماس (T)

ب/ أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

ج/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^2 + 3\ln x = 0$

التمرين الخامس عشر

f دالة معرفة على $D_f =]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) + \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايات عند حدود D_f وفسر النتائج بيانيا

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) أ/ بيّن أن (C_f) يقبل عند نقطتين منه A و B مماسين معامل توجيه كلا منهما يساوي 1

ب/عين إحداثيات النقطتين A و B

4) أ/ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا x_0 حيث: $\frac{13}{4} < x_0 < \frac{7}{2}$

ب/ثم استنتج إشارة $f(x)$ وذلك حسب قيم x

5) أحسب $f(2)$ ، $f(-5)$ ، $f(-3)$ ثم أنشئ (C_f)

6) ناقش بيانا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(x+2)\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) - mx - 2m - 3 = 0$

التمرين السادس عشر

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة هي $2cm$)

$I-$ الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة العددية g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	$\cdots$

والمعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1) أ/ احسب $g(1)$ ، ثم تحقق أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

ب/ أكمل جدول تغيرات الدالة g

2) أ/ علل وجود عدد حقيقي وحيد α من $]1;+\infty[$ حيث: $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق؛ $1,9 < \alpha < 2$

ب/ استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2) أ/ بين أن الدالة f فردية

ب/ بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

4) اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0

5) أ/ بيّن أن : $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب/أنشئ المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f)

التمرين السابع عشر

I نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2 - x(1+\ln 2 - \ln x)$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 2 - x - x\ln x$ و $f(0) = 2$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ بيّن أن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0)$ ، وفسّر النتيجة هندسيا

ب/ أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$ ماذا تستنتج ؟

2) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ احسب $f'(x)$ مشتق الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم أدرس إشارته

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2

ب/ استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4) أنشئ (Δ) والمنحنى (C_f)

التمرين الثامن عشر

I نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2+1}$

1) احسب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ/ بيّن أن : $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة g

3) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,5;0,6[$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)$ (يمكن وضع : $t=\frac{1}{x^2}$)، ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) بيّن أن : $\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x)=0$ ، (المطلوب إعطاء تفسير هندسي لهذه النتيجة)

3) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فان: $f'(x)=g(x)$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

5) أثبت أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

6) احسب : $\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f'(x)$ وفسر النتيجة المحصل عليها بيانيا

7) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

8) أنشئ $\left(C_f\right)$

التمرين التاسع عشر

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2-1+2\ln x$

1) احسب: $\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) أحسب $g'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) استنتج أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في المجال $]0;+\infty[$

4) استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب: $\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فان: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

3) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة: $x\mapsto \ln x$ في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

أ/ احسب: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

5) ارسم (C_f) و (Γ) في نفس المعلم

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^2\ln x-mx^2-\ln x-2x^2=0$

التمرين العشرون

$I-$ g الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-2\ln(x-1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج أن: $g(x) > 0$ من اجل كل x من المجال $]1;+\infty[$

II– f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \left(\ln(x+1)\right)^2$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ بين أن : $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\left(\ln u\right)^2}{u} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{u}$) ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$

ب/استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) ميله 1 ، يطلب إعطاء معادلة له

د/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\dfrac{e+1}{e};\dfrac{3}{2}\right[$

3) أحسب: $f(e+1)$ ، ثم أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f) في المجال $]1:e+1]$

التمرين الواحد والعشرون

I– h الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $h(x) = x + 3 - (x+2)\ln(x+2)$

1) ادرس تغيرات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1,5 < \alpha < 1,6$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$

II– f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x+3}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا

2) بين أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(x+1\right)\left(x+3\right)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]-2,+\infty\right[$ ، و شكل جدول تغيراتها

4) بين أن: $f(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha+2)}$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أ/ عين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات

ب/ عين معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

6) ارسم المنحنى (C_f) و (T)

التمرين الثاني والعشرون

$I-$ لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x(x-1) + \ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \left(x-1\right)^2 + \left(\ln x\right)^2$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب/ بين أن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$؛ $f'(x) = 2\dfrac{g(x)}{x}$

ج/اكتب جدول تغيرات الدالة f

2) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حل وحيد α بحيث $0,5 < \alpha < 1$

3) ادرس أحسب؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، وفسّر النتيجة هندسيا (خاص بشعبتي تقني رياضي ورياضيات)

4) أنشئ (C_f)

التمرين الثالث والعشرون

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2-1}{2x}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، (وحدة الطول **2cm**)

1) أحسب: $f(1)$ و $f(e)$

2) احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

4) شكل جدول تغيرات الدالة f

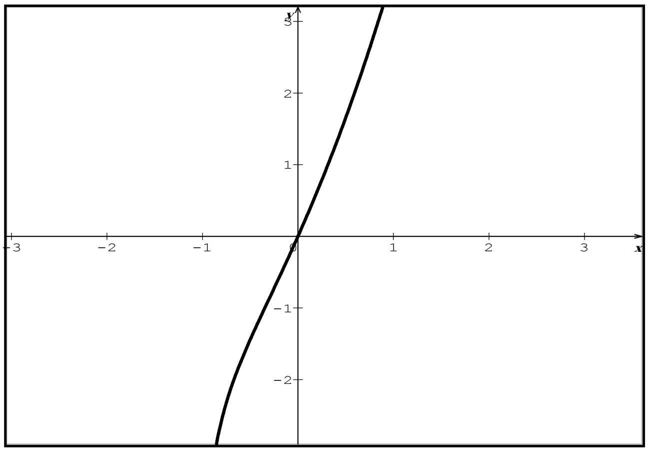
5) بين أن المعادلة: $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $3 < \alpha < 4$

6) احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \dfrac{1}{2}x\right]$ ، أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

7) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1

8) ارسم (T) و (C_f) والمستقيمات المقاربة

التمرين الرابع والعشرون



$I-$ g الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

(C) تمثيلها البياني المقابل

بقراءة بيانية

1) شكل جدول تغيرات g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

$II-$ f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول **2cm**)

1) أ/احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، وفسّر النتيجة هندسياً

ب/ باستخدام النتيجة: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$ ، برهن أن: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$

ج/ باستخدام النتيجة: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ، برهن أن: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$

د/ استنتج، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ/ احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right]$ ، واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C_f)

ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3) بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(x+1\right)^2}$، ثم شكل جدول تغيرات f

4) أرسم (Δ) والمنحنى (C_f)

التمرين الخامس والعشرون

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول **2cm**)

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. فسر النتيجتين هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها

4) عين إحداثيات نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

5) برهن أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل المبدأ ويمس المنحنى (C_f) في نقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

ثم أوجد معادلة للمماس (T)

6) أرسم (T) والمنحنى (C_f)

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx - \ln x - 1 = 0$

التمرين السادس والعشرون

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ ،

نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة h (وحدة الطول **2cm**)

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ وفسر النتيجتين هندسيا

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = x + 1 - \ln(1 + e^{x})$

3) بيّن أن : $h'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h ، وشكل جدول تغيراتها

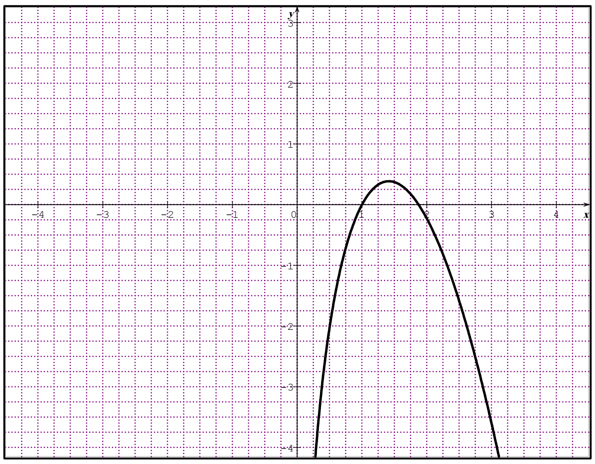
4) أ/ بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (C) مع (d)

5) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\alpha = -\ln(e - 1)$

6) أرسم (C) و (d)

التمرين السابع والعشرون



I– g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي

$g(x) = -x^2 + 1 + 4\ln(x)$ (C) تمثيلها البياني المقابل

بقراءة بيانية:

1) بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث

$1,87 < \alpha < 1,88$

3) أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II– f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + 4\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{5}{x}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$، (وحدة الطول **2cm**)

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، وفسر النتيجة هندسيا

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فان: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

ب/ احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - x + 2\right]$ ، وفسّر النتيجة هندسيا

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$

3) بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha - 2 + \dfrac{4}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4) أرسم (Δ) والمنحنى (C_f)

التمرين الثامن والعشرون

$I-$ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $g(x) = x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2|$

أ/ أدرس تغيرات الدالة g

ب/ أحسب $g(3)$ ، $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

$II-$ f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ حيث : $f(x) = 2 - x + \dfrac{\ln|x-2|}{x-2}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$

4) أثبت أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$

5) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

6) أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

7) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

8) برهن على وجود مماسين للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما -1

7) أنشئ (Δ) و (C_f)

التمرين التاسع والعشرون

f دالة معرفة على $D_f =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \ln|e^x - 2|$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ/ بين أن: $f(x) = 2x + \ln|1 - 2e^{-x}|$

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ج/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \ln 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \ln 2} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتاهما على التوالي : $y = 2x$ و $y = x + \ln 2$

4) أنشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f)

التمرين الثلاثون

f دالة معرفة على المجال $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\frac{x^2}{x+1}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. ثم احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا

2) بين أنه من أجل كل x من D_f ؛ $f'(x)=\frac{x+2}{x(x+1)}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ استنتج من جدول التغيرات أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة على D_f ، حيث k عدد حقيقي

ب/ بين أنه إذا كان $f(\alpha)=f(\beta)$ فإن $\alpha+\beta+\alpha\beta=0$ مع α و β عددين مختلفين من D_f

ج/احسب $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ثم استنتج فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل

5) بين أن (C_f) يقبل مماسا (Δ) يعامد المستقيم ذا المعادلة $3y=-2x$،يطلب تعيين معادلته

6) احسب $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ،ماذا يمكن القول عن (C_f) و (Γ) ؟حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة " $\ln$ "

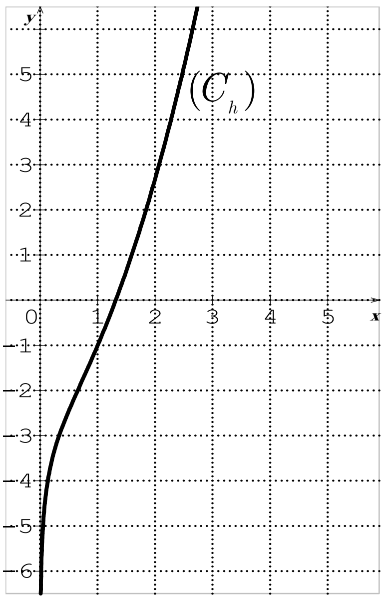
7) حدد وضعية (C_f) و (Γ) ثم ارسم (Γ) ، (Δ) و (C_f)

التمرين الواحد والثلاثون

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

$I-$ المنحنى (C_h) هو التمثيل البياني للدالة العددية h والمعرفة

على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2-2+\ln x$



1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة h

2) علل وجود عدد حقيقي وحيد α بحيث $1,25<\alpha<1,5$ يحقق: $h(x)=0$

3) استنتج اشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1-\ln x}{x}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

2) بيّن أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) بيّن أن: $f(\alpha)=2\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أ/ بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=x$

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) بيّن أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له

7) أنشئ كلا من (T) و (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المعلم السابق

8) ناقش ،بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ؛ $e^{mx}-\dfrac{e}{x}=0$

التمرين الثاني والثلاثون

I- علما أن $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$ بيّن أن $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} \alpha\ln\alpha=0$.

II- g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+1)\left[2-\ln(x+1)\right]-e$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$ فإن: $g(x)\leq 0$

III- f دالة معرفة بـ: $f(-1)=0$ ومن أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ $f(x)=(x+1)-(x+1)\ln(x+1)$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}$. ثم فسر هندسيا هذه النتيجة

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $e-1$

ب/ ادرس الوضع النسبي المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ج/ أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-1;4]$

IV- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f\left(|x|-1\right)$

1) بيّن أن الدالة h زوجية

2)أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0

3) دون دراسة تغيرات الدالة h شكل جدول تغيراتها

4) ناقش ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\left|x\right|^{|x|} = e^{|x|-m}$

التمرين الثالث والثلاثون

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{1\right\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\ln\left|x-1\right|$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسيا

2)أ/ بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها ، ثم بيّن أن : $f'(x)=\dfrac{-x}{(x-1)^2}$

ب/ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3)أ/ بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left]4;5\right[$

ب/ بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيتيها

4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2 ، وأكتب معادلتيهما

5) أحسب $f(6)$ ، $f(10)$ ، $f(-1)$ ، $f(-4)$ و $f(-8)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f)

6) ناقش بيانيا ،حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln\left|x-1\right|$$

7) نعتبر الدالة h والمعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-1;1\right\}$ كما يلي : $h(x)=f\left(\left|x\right|\right)$

وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة h في المعلم السابق

أ/ أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h؟ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ بين أن الدالة h زوجية ، ثم أرسم المنحنى (C_f) في نفس المعلم السابق

8) نعتبر الدالة g والمعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln(e^{x}-1)$

أ/ بيّن أنه من كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f(e^{x})$ ، ثم استنتج اتجاه تغير g

ب/ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

التمرين الرابع والثلاثون

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بالعبارة: $g(x)=-x+1+x\ln(x)$

(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)أدرس تغيرات الدالة g . ثم أدرس إشارة $g(x)$

2)ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x\to\ln(x)$ في المعلم السابق

أ/ بين أن (C_g) و (C) يشتركان في نقطتين فاصلتاهما 1 و e

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[1;e\right]$ فإن : $g(x)\le\ln(x)$

$II-$لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\left]1;+\infty\right[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول **2cm**)

1) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها وأن: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x(x-1)^2}$

2) بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=1$ وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا

3) شكل جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,5<\alpha<3,6$

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الخامس والثلاثون

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب

3) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8<\alpha<1,9$

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\dfrac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f)

بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $\left(2-3|m|\right)x+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين السادس والثلاثون

I. نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{1}{2}} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا

2) أ/ بيّن أنّ: من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب/ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيتيها ثمّ أنشئ (C_f)

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$

1) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g

ب/ بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2<\alpha<1,3$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$

التمرين السابع والثلاثون

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1

4) أ) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x+1$ معادلة له

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ)

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C)

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(0,1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$

التمرين الثامن والثلاثون

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

(حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ) بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^2}$. (f' هي مشتقة الدالة f)

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) أرسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن $f(\alpha) = 3,16$)

2) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ: $k(x) = f\left(-\left|x\right|\right)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن الدالة k زوجية

ب) بين كيف يمكن استنتاج (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه (دون دراسة تغيرات الدالة k)

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

التمرين التاسع والثلاثون

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ،فسر النتيجتين هندسيا

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$

ب/اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

ج/بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

3) أنشئ (T) والمنحنى (C_f)

4) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

أ/ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج؟

ب/أنشئ المنحنى (C_f) اعتمادا على المنحنى (C_h)

ج/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\ln x^2=(m-1)|x|$

التمرين الأربعون

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج أنه ، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$

$II-$ f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب/أدرس اتجاه تغير f على $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$، ثم تحقق أن $0<\alpha<0,5$

2) أ/ بيّن أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

3) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0

أ/ أحسب x_0

ب/أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f)

ج/عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين

التمرين الواحد والأربعون

$I-$ لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

1- أ/ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

2- أ/ بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $0,4<\alpha<0,5$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

$II-$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$

1- أ/ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب/ بين أن: $f(\alpha)=-\alpha+4-\dfrac{4}{\alpha+1}$ ثم أعط حصرا لـ$f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2})

3- ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$ ، نسمي (T_a) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة a

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h(x)=f(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]$

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=f'(x)-f'(a)$

ب/ باستعمال اتجاه تغير الدالة g ، عين إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغير h على $]-1;+\infty[$

ج/ حدد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (T_a)

4- أ/ بين أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما

ب/ أرسم المماسين والمنحنى (C)

التمرين الثاني والأربعون

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-x\ln x$

1) أ/أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن للمعادلة $g(x)=-1$ حلا وحيدا α حيث $3,5<\alpha<3,6$

3) استنتج اشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=4cm$

4) بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

5) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

د/ احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسر النتيجة هندسيا

6) أ/ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$

ب/ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2})

ج/ ارسم (C_f)

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)...(E)$

أ/ تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x-m$

ب/ عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي

أ/ بين أن الدالة h زوجية

ب/ ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

التمرين الثالث والأربعون

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52;0,53[$ حلا وحيدا α

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$II-$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f

ج/ تحقق أن: $f(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم عين حصرا له

3) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ)

ج/ بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابه معادلة ديكارتيه له

4) نقبل أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0,22 < x_0 < 0,23$ و $2,11 < x_1 < 2,13$ أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f)

5) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم m ،عدد حلول المعادلة: $3 + 2\ln x - mx = 0$

التمرين الرابع والأربعون

$I-$ h دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أستنتج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$ ، $h(x) > 0$

$II-$ f دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+2)^2}$

ب/أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left]-2\,;+\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

4) أ/ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها

ب/أرسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f)

III- g دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\left|x+1\right|+\dfrac{2}{x+2}\left|\ln(x+2)\right|$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟

2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3)انطلاقا من المنحنى (C_f) أرسم المنحنى (C_g)الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين الخامس والأربعون

f الدالة معرفة بـ: $f(0)=1$ ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-x^2\ln x$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2)أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;+\infty[$. ب/تحقق أن : $1,531<\alpha<1,532$.

4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f\left(\left|x\right|\right)$

و (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

أ/ ادرس شفعيه الدالة g ب/ أنشئ المنحنى (C_g)على المجال $]-2;2[$

التمرين السادس والأربعون

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

I- g دالة معرفة على $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

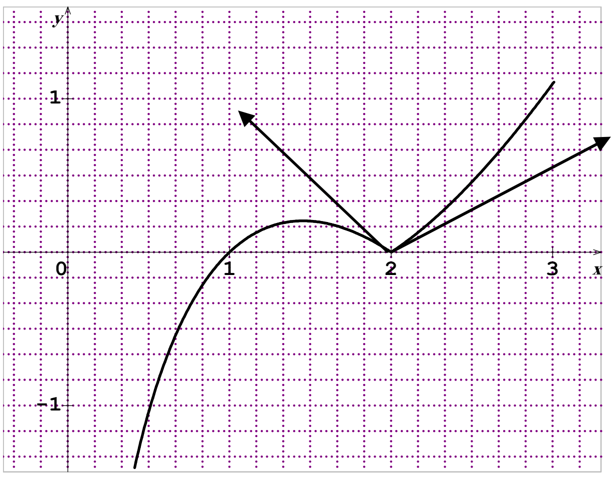
2)أ/ بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α في

المجال $]0;3]$ ثم تحقق أن $1,45<\alpha<1,46$

ب/استنتج إشارة $g(x)-2$

II- التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f

والمعرفة على المجال $]0;3[$ بـ: $f(x)=\left|x-2\right|\ln x$



1) باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق للدالة f عند 2

2) أثبت صحة تخمينك

3) أدرس تغيرات الدالة f

$III-$ h الدالة المعرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) حيث (C_h) منحنى الدالة h

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)

التمرين السابع والأربعون

4) f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ/ادرس تغيرات الدالة f

ب/أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e

ج/ عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$

2) g الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ/ ادرس تغيرات الدالة g

ب/عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم أرسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$

التمرين الثامن والأربعون

$I-$ g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31<\alpha<0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

$II-$ f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+\left[2-\ln(x+1)\right]^2$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها

4) بيّن أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5)مثّل المنحنى (C_f) على المجال $\left]-1;2\right[$

$III-$ (Γ) المحنى الممثل للدالة h المعرفة على $\left]-1;+\infty\right[$ بالعبارة : $h(x)=\ln(x+1)$

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x

1)أثبت أن المسافة AM تعطى بالعبارة : $AM=\sqrt{f(x)}$

2)الدالة k معرفة على $\left]-1;+\infty\right[$ بالعبارة : $k(x)=\sqrt{f(x)}$

أ/بيّن أن للدالتين k و f نفس إتجاه التغير على المجال $\left]-1;+\infty\right[$

ب/عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج/ بيّن أن : $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$

التمرين التاسع والأربعون

$I-$ نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي: $u(x)=e^x-3x+4-e$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة u

ب/ بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، $e^x-e>3x-4$

2) الدالة v معرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

أ/ بين أن : $v'(1)=0$. (يرمز v' الى الدالة المشتقة للدالة v)

ب/ أثبت أنه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، $v(x)\le 0$

ج/استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

3) أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

$II-$ الدالة f معرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0;+\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$

(نأخذ: $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5,75$)

التمرين الخمسون

$I-$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) أ/احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) بيّن أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+5$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$ وّ $-1,1<\beta<-1$

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

6)أ/نعتبر النقطتين $A(-1;3+6\ln\frac{3}{4})$ و $B(-2;\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4})$

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

ب/ بيّن أن (AB) يمس (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

التمرين الواحد والخمسون

$I-$ g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+a+b\ln(x)$

1)عيّن العددين الحقيقيين a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4

2) نضع : $a=-2$ و $b=2$

أ/ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها

ب/بيّن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $]0;+\infty[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

$II-$ f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ب/ احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ج/استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2)أ/بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ب/بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم جد معادلة له

ج/ نأخذ $\alpha = 1,25$ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث:
$0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$. ثم ارسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f)

3)ناقش بيانيا ،حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وحلول المعادلة : $(m+2)x + 2\ln(x) = 0$

التمرين الثاني والخمسون

$-I$ g دالة معرفة على $]-1;3[$ بـ: $g(x) = 2\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلين احدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$

3)عيّن ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

4) h دالة عددية معرفة على $]-1;3[$ بـ: $h(x) = \left[g(x)\right]^2$

أ/ أحسب $h'(x)$ بدلالة كلا من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب/عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

$-II$ f دالة عددية معرفة على $]-1;3[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

2) أ/بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1;0[\cup]0;3[$ ، $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left[\ln(x+1)\right]^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب/ بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$،ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

ج/أحسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

3) أ/بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$

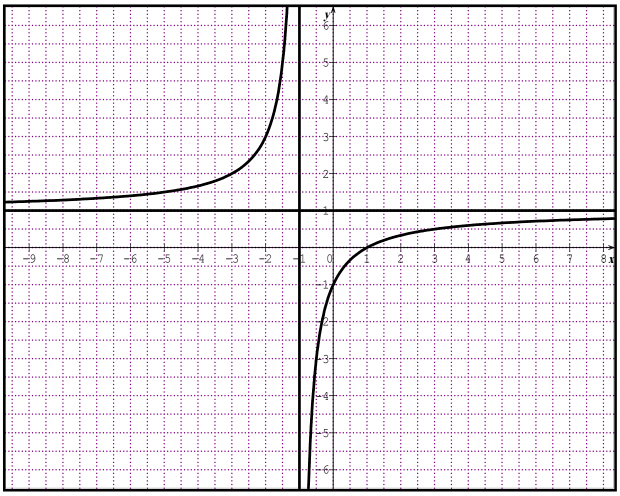
ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T)

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة **3**

5) أرسم (T) ، (T') و (C_f)

6) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

التمرين الثالث والخمسون



$I-$ نعتبر الدالة **g** المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني(الشكل المقابل) بقراءة بيانية:

أ/شكل جدول تغيرات الدالة g

ب/حل بيانيا المتراجحة: $g(x)>0$

ج/ عين بيانيا قيم x التي من أجلها $0<g(x)<1$

$II-$ لتكن الدالة f والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

2) أ/ بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

ب/احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات f

ج/ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0\in]3,62\,;3,63[$.

د/ أرسم المنحنى (C_f)

3) أ/ باستعمال الجزء (I) السؤال (ج) ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$

التمرين الرابع والخمسون

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{a+b\ln 2x}{4x^2}$ ،حيث a و b عددان حقيقيان (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل

2) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1+2\ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق

أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$

د/ أنشئ (C_g)

التمرين الخامس والخمسون

1) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln(x^2)-1$

أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

ب/أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

2) f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)(\ln x)$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ/ بيّن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ب) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\to\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

– أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى للمنحنى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟.

– أرسم (δ) و (C_f)

التمرين السادس والخمسون

$I-$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x) = 1+\ln(2x-1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$

2) بيّن أن f متزايدة تماما على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$.

4)أ/أثبت أنه من أجل كل x من I: $f(x) = \ln(x+a)+b$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب/أستنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة $\ln$.ثم ارسم (C) و (C_f) .

$II-$ g الدالة المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x)-x$

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2)أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3)أ/ احسب $g(1)$ ،ثم بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,5;+\infty[$ حلا وحيدا α

تحقق أن $2 \prec \alpha \prec 3$.

ب/ارسم (C_g) منحنى g على $]0,5;5[$ في المعلم السابق

4) استنتج إشارة $g(x)$ على I ثم حدّد وضعية (C_f) و (d)

5) برهن أنه من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$

التمرين السابع والخمسون

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x-1-2\ln x$ و (C_g) المنحنى الممثل لها

1)احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) أ/ بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ب/أدرس تغيرات الدالة g

ج/ أحسب $g(1)$

د/ برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلين مختلفين احدهما α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

هـ/ استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

3) f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \quad ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

أ/احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

ج/ بيّن أنه من أجل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f

د/شكل جدول تغيرات الدالة f بيّن أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4/أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$

التمرين الثامن والخمسون

$I-$ h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

2) بين أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

3) احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$

$II-$ f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ نسمي (C_f) تمثيلها البياني

1)أ/احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

ب/باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$، برهن أن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. ج/استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

د/احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

هـ/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

2)بين أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3)بين أن (C_f) يقطع يقطع المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$

4)أرسم (C_f)

التمرين التاسع والخمسون

1) g دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \ln x$

أ/ احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب/أدرس اتجاه تغير الدالة g

ج/ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$: $g(x) \neq 0$

2) f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{6\ln x}{2x + \ln x}$ ،

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

أ/ بيّن أنه يمكن كتابة $f(x) = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{2 + \dfrac{\ln x}{x}}$ ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د/ ما هي قيمة العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين ؟.

هـ/ جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .حيث (C_f) التمثيل البياني للدالة f

3) h دالة عددية معرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $h(x) = f(e^x)$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة h

ب/ جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1

ج/ أرسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في المعلم السابق

المحطة الثالثة

حلـــــــول نموذجيـــــة لبعـــض المسائــــــل

حل نموذجي للتمرين الأول

$I-$ **1**) حساب: $f(-x)+f(x)$

$f(-x)+f(x)=1-\dfrac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\dfrac{\ln x^2}{x}=2+\dfrac{\ln x^2}{x}-\dfrac{\ln x^2}{x}=\boxed{2}$ ومنه $\boxed{f(-x)+f(x)=2}$

✓ الاستنتاج: بصفة عامة: $(\alpha;\beta)$ معناه $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ بالمطابقة مع $f(-x)+f(x)=2$

نجد $\boxed{\alpha=0}$ و $\boxed{\beta=1}$ إذن النقطة $(0;1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

2) حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{\ln x^2}{x}=\dfrac{-\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين ، إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{\ln x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{2\ln|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}1-\frac{\ln x^2}{x}=1-\frac{\ln 0^+}{{}^+0}=1-\frac{-\infty}{{}^+0}=\boxed{+\infty}$$

✓ استنتاج النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$: لدينا $f(-x)+f(x)=2$ ومنه $f(x)=2-f(-x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2-f(-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\underbrace{f(x)}_{1}\right]=2-1=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[2-f(-x)\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2-\underbrace{f(x)}_{+\infty}\right]=2-\infty=\boxed{-\infty}$$

✓ تفسير النتائج هندسيا

$\boxed{y=1}$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ $\quad\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

3) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا $f'(x)=0-\dfrac{\frac{2}{x}.x-\ln x^2}{x^2}=\dfrac{-2+\ln x^2}{x^2}$ ومنه $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2+\ln x^2}{x^2}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة " $-2+\ln x^2$ " لأن المقام موجب تماما وعليه نحل المعادلة $-2+\ln x^2=0$

$-2+\ln x^2=0\Rightarrow\ln x^2=2\Rightarrow x^2=e^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{e^2}$ ومنه $\boxed{x=e}$ أو $\boxed{x=-e}$

x	$-\infty$ $\quad -e$ $\quad 0$	$\quad e$ $\quad +\infty$
$f'(x)$	$\|$ $+$ 0 $-$ $\|$	$\|$ $-$ 0 $+$

توضيح كيفية استنتاج الإشارة

$$-2+\ln x^2>0 \Rightarrow \ln x^2>2 \Rightarrow x^2>e^2 \Rightarrow x^2-e^2>0$$

$$-2+\ln x^2<0 \Rightarrow \ln x^2<2 \Rightarrow x^2<e^2 \Rightarrow x^2-e^2<0$$

ومنه إشارة $-2+\ln x^2$ نفسها إشارة x^2-e^2 (معادلة من درجة **II**)

$$-2+\ln x^2<0 \Rightarrow \ln x^2<2 \Rightarrow x^2<e^2 \Rightarrow -e<x<e$$

✓ **جدول التغيرات**

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e+2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e-2}{2}$	$\nearrow$	1

4) **إثبات أن المنحنى** (C_f) **يقطع المستقيم** $(\Delta): y=1$ **في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما**

نحل المعادلة: $f(x)-1=0$

$$f(x)-1=0 \Rightarrow 1-\frac{\ln x^2}{x}-1=0 \Rightarrow \frac{-\ln x^2}{x}=0 \Rightarrow -\ln x^2=0$$

$$\Rightarrow \ln x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}$$

ومنه $\boxed{x=1}$ **أو** $\boxed{x=-1}$ **وبالتالي** $(C_f)\cap(\Delta)=\{(-1;1),(1;1)\}$

5) **تبيان أن المعادلة:** $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في المجال** $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$

f **مستمرة ومتناقصة تماما على المجال** $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ **و** $f(-1)=1$ **و** $f\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq-1,7$ **أي** $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$

إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α **يحقق** $f(\alpha)=0$ **حيث** $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$

6) **كتابة معادلة المماس** (d) **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ **وبما أن** $f'(1)=-2$ **و** $f(1)=1$ **فإن** $\boxed{(d): y=-2x+3}$

7) **إثبات أن للمنحنى** (C_f) **مماسا وحيدا** (T) **يشمل النقطة** $A(0,1)$ **ويمس المنحنى** (C_f) **في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتها**

بصفة عامة للمماس معادلة من الشكل $y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$ **نعوض** x **و** y **بـ** 1 **نجد** $-f'(x)x_0+f(x_0)=1$

$$-f'(x)x_0+f(x_0)=1 \Rightarrow -x_0\frac{-2+\ln x_0^2}{x_0^2}+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1 \Rightarrow \frac{2-\ln x_0^2}{x_0}-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$$

$$\Rightarrow \frac{2-2\ln x_0^2}{x_0}=0 \Rightarrow 2-2\ln x_0^2=0 \Rightarrow \ln x_0^2=1 \Rightarrow x_0^2=e \Rightarrow x_0=\pm\sqrt{e}$$

ومنه $\boxed{x_0=\sqrt{e}}$ **أو** $\boxed{x_0=-\sqrt{e}}$

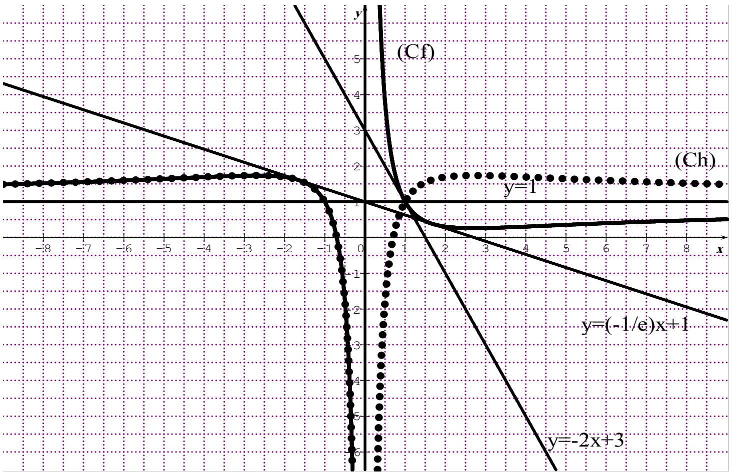
وعليه (C_f) يقبل مماس (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس (C_f) في النقطتين $\left(\sqrt{e};1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ، $\left(-\sqrt{e};1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

✓ تعيين معادلة المماس (T) : $y = f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x-\sqrt{e}\right)+f\left(\sqrt{e}\right)$ وبما أنّ $f'\left(\sqrt{e}\right) = \frac{-1}{e}$ و $f\left(\sqrt{e}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{e}}$

فإن $y = \frac{-1}{e}\left(x-\sqrt{e}\right)+1-\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \boxed{(T) : y = \frac{-1}{e}x+1}$

ملحوظة: كتبنا معادلة المماس بالفاصلة $\boxed{x_0 = \sqrt{e}}$ والأمر سيان لو استخدمنا الفاصلة $\boxed{x_0 = -\sqrt{e}}$

8) رسم (T) ، (Δ) و (C_f)



9) المناقشة البيانية: $f(x) = mx+1$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f)

مع المستقيم الدوار $y = mx+1$

(مهما تغيرت قيم الوسيط m فان المستقيم $y = mx+1$

يشمل النقطة $(0;1)$) ويمكن إثبات ذلك بكل بساطة

$m < \frac{-1}{e}$ لا يوجد حل

$m = \frac{-1}{e}$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة ولـما $\frac{-1}{e} < m < 1$ يوجد حلين موجبين وحلين سالبين

$m > 1$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة

$II-$ **1)** تبيان أن h دالة زوجية : نبين أنّ $h(-x) = h(x)$ [نستخدم الخاصية $\left|-x\right| = \left|x\right|$]

$h(-x) = 1+\frac{\ln x^2}{\left|-x\right|} = 1+\frac{\ln x^2}{\left|x\right|} = h(x)$ ومنه h دالة زوجية

2) رسم (C_h) ، مع تبرير

أولا ننزع القيمة المطلقة من عبارة الدالة h : لدينا $h(x) = \begin{cases} 1+\frac{\ln x^2}{x} ; x \in \left]0;+\infty\right[\\ 1-\frac{\ln x^2}{x} ; x \in \left]-\infty;0\right[\end{cases}$

ومنه $h(x) = f(x)$ لما $x \in \left]-\infty;0\right[$ وبالتالي (C_h) منطبق على (C_f) على المجال السالب $\left]-\infty;0\right[$ ونكمل الرسم

بالتناظر مع حامل محور التراتيب لأن h دالة زوجية كما هو موضح في المعلم بالخط المتقطع

حل نموذجي للتمرين الثاني

$I-$ **1)** التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = x+\ln(1+e^{-x})$

$$h(x)=\ln(1+e^{x})=-\underbrace{\ln e^{-x}}_{=-x}+\ln e^{-x}+\ln(1+e^{x})=x+\ln\left[e^{-x}.(1+e^{x})\right]$$
$$=x+\ln(1+e^{-x})\ \#$$

2) **حساب** $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ $\lim_{x\to-\infty}h(x)$: $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{x})=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\ln(1+\cancel{e^{x}})=\ln 1=0$ تفسر هندسيا: $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

3) **دراسة اتجاه تغير الدالة** h : h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا؛ $h'(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}>0$ ، ومنه h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

✓ **جدول التغيرات**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

4) أ/**تبيّان أن المستقيم** (Δ) **ذا المعادلة**: $y=x$ **مقارب مائل للمنحنى** (C) **بجوار** $+\infty$

لدينا الشكل الثاني للدالة h ، $h(x)=x+\ln(1+e^{-x})$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\cancel{e^{-x}})=\ln 1=0$$

ومنه $y=x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

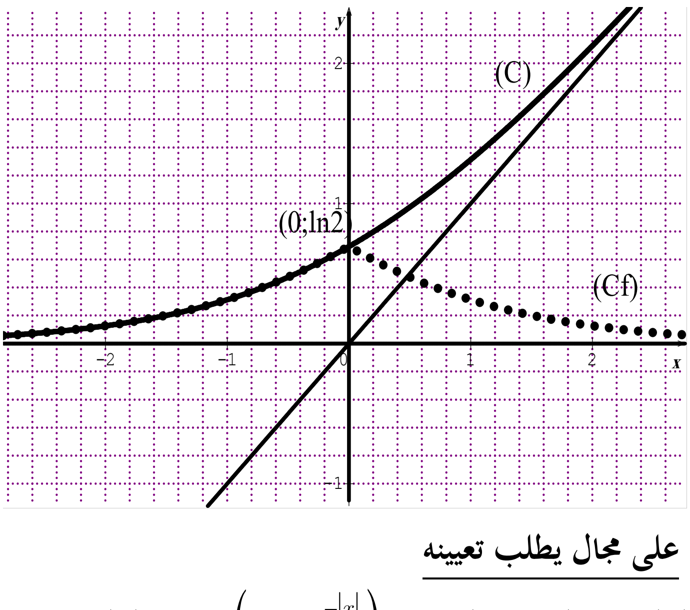
ب/ **دراسة الوضع النسبي لـ** (C) **مع** (Δ)

ندرس إشارة الفرق $h(x)-y=\ln(1+e^{-x})>0$ لان ما داخل $\ln$ اكبر تماما من 1 $(1<1+e^{-e}>1)$

ومنه (C) فوق (Δ) على $\mathbb{R}$

5) **حساب** $h(0)$: $h(0)=\ln 2$ معناه $(C)\cap(yy')=\left\{(0,\ln 2)\right\}$

✓ **رسم** (C) **حيث**: $\ln 2\approx 0{,}69$



II−1) **برهان أن** $f(x)=h(x)$ **على مجال يطلب تعيينه**

بما أن $|x|=-x$ لما $x\leq 0$ فان $f(x)=\ln\left(1+e^{-|x|}\right)=\ln(1+e^{x})=h(x)$ على $\left]-\infty;0\right]$

2) **تبيّان أن** f **دالة زوجية**: $f(-x)=\ln\left(1+e^{-|-x|}\right)$

وبما أن $|x|=|-x|$ فان: $f(-x)=\ln\left(1+e^{-|x|}\right)=f(x)$ ومنه f دالة زوجية

3) شرح كيفية رسم (C_f) انطلاقا من (C): على المجال $]-\infty;0[$ ، (C_f) منطبق على (C) لان $f(x)=h(x)$ ونكمل الرسم بالتناظر مع محور التراتيب لان f دالة زوجية (رسم (C_f) هو الخط المتقطع من المنحنى)

4) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-m$ حلين مختلفين في الإشارة

لما $0<-m<\ln 2$ ومنه $-\ln 2<m<0$

حل نموذجي للتمرين الثالث

I. 1) بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) على $]0;+\infty[$

لما $]0;\alpha[$ $x\in$: (γ) تحت (Δ) ، لما $]\alpha;+\infty[$ $x\in$: (γ) فوق (Δ) ولما $x=\alpha$: (γ) يقطع (Δ)

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

$$g(x)=x-3+\ln x=\underbrace{\ln x}_{(\gamma)}-\underbrace{(-x+3)}_{(\Delta)}$$ وعليه

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

✓ التحقق من أن: $2{,}2<\alpha<2{,}3$

بما أنّ: $g(2{,}2)\simeq-0{,}01$ و $g(2{,}3)\simeq0{,}13$ أي $g(2{,}2)\times g(2{,}3)<0$ فإن $2{,}2<\alpha<2{,}3$

III. $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\Bigg(\underbrace{1-\frac{1}{x}}_{-\infty}\Bigg)\underbrace{(\ln x-2)}_{-\infty}=(-\infty)\times(-\infty)=\boxed{+\infty}$$ و $$\lim_{x\to+\infty}\Bigg(\underbrace{1-\frac{1}{x}}_{1}\Bigg)\underbrace{(\ln x-2)}_{+\infty}=1\times(+\infty)=+\infty$$

2) إثبات أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$: f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}.\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln x-2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x-3+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب تماما وعليه جدول تغيراتها يكون كما يلي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تبيان أن: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$: لدينا

وأيضا: $g(\alpha)=0$ أي $g(\alpha)=\alpha-3+\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=-\alpha+3...(2)$

نعوض (2) في (1) نجد $f(\alpha)=\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}(-\alpha+1)=\dfrac{-(\alpha-1)(\alpha-1)}{\alpha}=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: لدينا $2,2<\alpha<2,3$ ومنه $1,2^2<(\alpha-1)^2<1,3^2.....(2)$

وأيضا $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ $\dfrac{1}{2,3}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{2,2}....(2)$ بضرب المتباينتين (1) و(2) طرف لطرف نجد

$\dfrac{1,2^2}{2;3}<\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\dfrac{1,3^2}{2,2}$ ومنه $-\dfrac{1,3^2}{2,2}<-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<-\dfrac{1,2^2}{2;3}$ وعليه $\boxed{-0,77<f(\alpha)<-0,63}$

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل: ندرس إشارة $f(x)$ من أجل ذلك نحل المعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0\Rightarrow\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)=0$ إما $1-\dfrac{1}{x}=0$ أو $\ln x-2=0$

$$1-\frac{1}{x}=0\Rightarrow\frac{x-1}{x}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

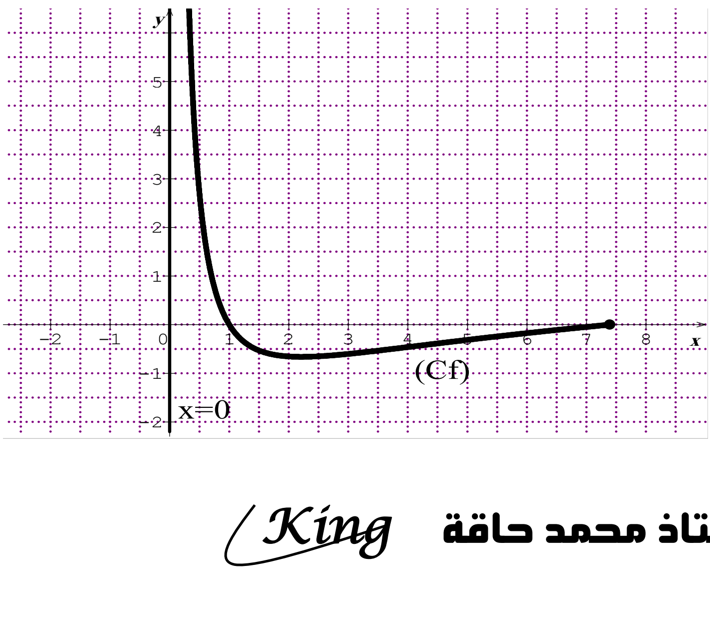
$$\ln x-2=0\Rightarrow\ln x=2\Rightarrow\boxed{x=e^2}$$

x	0		1		$e2$		$+\infty$
$1-\frac{1}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$ln(x)-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لما $x\in\left]0;1\right[\cup\left]e^2;+\infty\right[$: (C_f) فوق (xx') ، لما $x\in\left]1;e^2\right[$: (C_f) تحت (xx')

وعند الفاصلتين 1 و e^2 : (C_f) يقطع (xx')

5) إنشاء (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$



محبكم في الله الأستاذ محمد حاقة King

حل نموذجي للتمرين الرابع

I. $g(x) = x - x\ln x$

1) أ/حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \underbrace{x}_{0} - \underbrace{x\ln x}_{0} = \boxed{0}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x\ln x = +\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين ، إزالتها

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}(\underbrace{1-\ln x}_{-\infty}) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$ (ملحوظة $(+\infty)(-\infty) = -\infty$ وليست ح ع ت)

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

✓ حساب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x}.x = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

نحل المعادلة $g'(x) = 0$ ، $g'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

✓ جدول التغيرات3

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيان أن للمعادلة $g(x) = -1$ حلا وحيدا α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]3,5;3,6[$ و $g(3,5) \simeq -0,8 > -1$

و $g(3,6) \simeq -1,01 < -1$

إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α يحقق $g(\alpha) = -1$

حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

3) استنتاج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0 α $+\infty$
$g(x)+1$	$+$ 0 $-$

II. $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

8) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$: نحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln x}{x+1} = \frac{-\infty}{1} = \boxed{-\infty}$ ومنه $\boxed{x = 0}$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين ، إزالتها $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

ومنه $\boxed{y = 0}$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

9) أ/ برهان أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$: f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}=\frac{\overbrace{x-x\ln x+1}^{g(x)}}{x(x+1)^2}=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

ومنه $\boxed{f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}}$

ب/ تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$ لأن المقام موجب تماما ومنه

f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

✓ جدول التغيرات

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ج/ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وبما أن $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ و $f(1)=0$ فإن

$$\boxed{(T):y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$

د/ حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)+1}{\alpha(\alpha+1)^2}=\frac{-1+1}{\alpha(\alpha+1)^2}=\frac{0}{\alpha(\alpha+1)^2}=0$$

تُفسر هندسيا: (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة $(\alpha;f(\alpha))$، معادلته $y=f(\alpha)$

10) أ/ تبيان أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$: $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha+1}....(1)$ وأيضا: $g(\alpha)=-1$ أي $\alpha-\alpha\ln\alpha=-1$

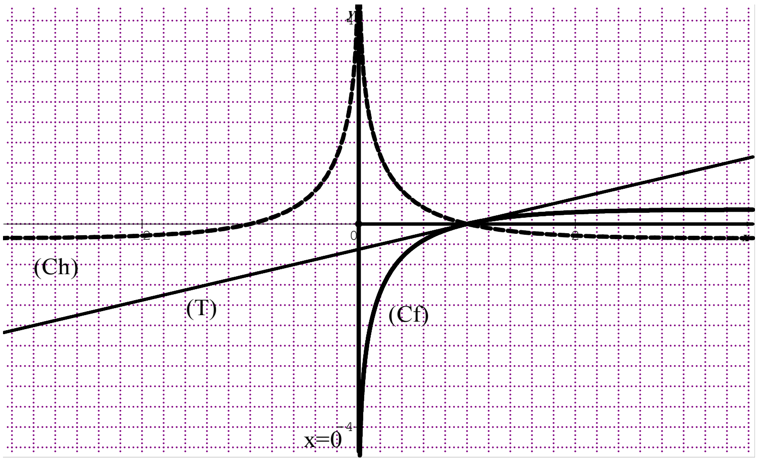
ومنه $\ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}...(2)$ بتعويض **(2)** في **(1)** نجد: $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{1}{\alpha}$ ومنه $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}}$

ب/ استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}): لدينا $3,5<\alpha<3,6$ ومنه $\dfrac{1}{3,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{3,5}$

وعليه $\boxed{0,28<f(\alpha)<0,29}$

ج/ رسم (C_f)

11) $x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)...(E)$



أ/ التحقق من أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى

حل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

$$x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)\Rightarrow x(x+1)-2m(x+1)=2\ln|x|$$
$$\Rightarrow \frac{x(x+1)-2m(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln x}{x+1}$$
$$\Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+1}-\frac{2m(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln x}{x+1}$$
$$\Rightarrow x-2m=\frac{2\ln x}{x+1}$$
$$\Rightarrow \frac{x-2m}{2}=\frac{2\ln x}{2(x+1)}\Rightarrow\frac{\ln x}{x+1}=\frac{1}{2}x-m\Rightarrow\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x-m}$$

ب/ يكون للمعادلة (E) حلين متمايزين لما $-m<-\frac{1}{2}$ أي $\boxed{m>\frac{1}{2}}$ أو نعبر عن قيم m بمجال: $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

5) $h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ أ/ تبيان أن الدالة h زوجية: نبيّن أنّ $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=\frac{\ln|-x|}{-|-x|-1}=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}=h(x)$ إذن h دالة زوجية

ب/ رسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

شرح كيفية الرسم: لما $x > 0$: $h(x) = \dfrac{\ln|x|}{-|x|-1} = \dfrac{\ln x}{-x-1} = \dfrac{\ln x}{-(x+1)} = -\left[\dfrac{\ln x}{x+1}\right] = -h(x)$

ومنه (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل كما هو موضح في الرسم ونكمل الرسم بالتناظر مع حامل محور التراتيب لأن h دالة زوجية

محبكم في الله الأستاذ محمد حاقة King

حل نموذجي للتمرين الخامس

1) أ/ حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا $\boxed{f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}}$

f' قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ولدينا $f''(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{x+4}{(x+2)^2}$ ومنه $\boxed{f''(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)^2}}$

ب/ تعيين إشارة $f''(x)$: إشارة $f''(x)$ من إشارة" $x+4$ " لأن المقام موجب تماما

نحل المعادلة $x+4=0$: $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \notin]-2;+\infty[$ والإشارة كما يلي

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$

✓ استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-0,6;-0,5[$

بحيث $f'(\alpha) = 0$

بما أنّ $f''(x) > 0$ على $]-2;+\infty[$ فان f' متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$

ومنه f' مستمرة ومتزايدة تماما على $]-0,6;-0,5[$ و $f'(-0,6) \simeq -0,09$ و $f'(-0,5) \simeq 0,07$

أي $f'(-0,6) \times f'(-0,6) < 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α يحقق $f'(\alpha) = 0$

حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$

توضيح

x	α
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

2) دراسة تغيرات الدالة f

أ/ حساب النهايتين $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x\ln(x+2) = \boxed{+\infty}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} 1 + x\ln(x+2) = 1 - 2\underbrace{\ln 0^+}_{-\infty} = \boxed{+\infty}$

ب/ حساب $f'(x)$: مما سبق $\boxed{f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}}$ ومن السؤال(**1 –** أ): $f'(\alpha) = 0$ فإن

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\quad -$	0	$+$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-2;\alpha]$

3)تبيان

أن: $f(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$:لدينا $f(\alpha) = 1 + \alpha\ln(\alpha+2) \ldots (2)$

وأيضا $f'(\alpha)=0$ أي $f'(\alpha)=\ln(\alpha+2)+\dfrac{\alpha}{\alpha+2}=0$ ومنه $\ln(\alpha+2)=\dfrac{-\alpha}{\alpha+2}...(2)$ بتعويض (2) في (1)

نجد $f(\alpha)=1+\alpha\ln(\alpha+2)=1+\alpha\times\dfrac{-\alpha}{\alpha+2}=1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$ ومنه $\boxed{f(\alpha)=1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}}$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$: لدينا $\alpha\in\left]-0,6;-0,5\right[$ ومنه $-0,6<\alpha<-0,5\Rightarrow\boxed{0,25<\alpha^2<0,36}....(1)$

وأيضا: $-0,6<\alpha<-0,5\Rightarrow 1,4<\alpha+2<1,5\Rightarrow\boxed{\dfrac{1}{1,5}<\dfrac{1}{\alpha+2}<\dfrac{1}{1,4}}....(2)$

بضرب أطراف المتباينتين طرف بطرف نجد

$$\frac{0,25}{1,5}<\frac{\alpha^2}{\alpha+2}<\frac{0,36}{1,4}\Rightarrow-\frac{0,36}{1,4}<-\frac{\alpha^2}{\alpha+2}<-\frac{0,25}{1,5}\Rightarrow1-\frac{0,36}{1,4}<1-\frac{\alpha^2}{\alpha+2}<1-\frac{0,25}{1,5}$$
$$\Rightarrow\boxed{0,74<f(\alpha)<0,83}$$

3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_a) ، (T_b) يمران من المبدأ

بصفة عامة للمماس معادلة من الشكل $y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$ نعوض x و y بـ 0 نجد $-f'(x)x_0+f(x_0)=0$

$$-f'(x)x_0+f(x_0)=0\Rightarrow-x_0\ln(x_0+2)-\frac{x_0^2}{x_0+2}+1+x_0\ln(x_0+2)=0\Rightarrow-\frac{x_0^2}{x_0+2}+1=0$$
$$\Rightarrow\frac{-x_0^2+x_0+2}{x_0+2}=0\Rightarrow-x_0^2+x_0+2=0$$

نحسب المميز Δ : $\Delta=9>0$ يوجد حلين مختلفين هما: $\boxed{x_0=2}$ أو $\boxed{x_0=-1}$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_a) ، (T_b) يمران من المبدأ فاصلتيهما $\boxed{x_0=2}$ و $\boxed{x_0=-1}$

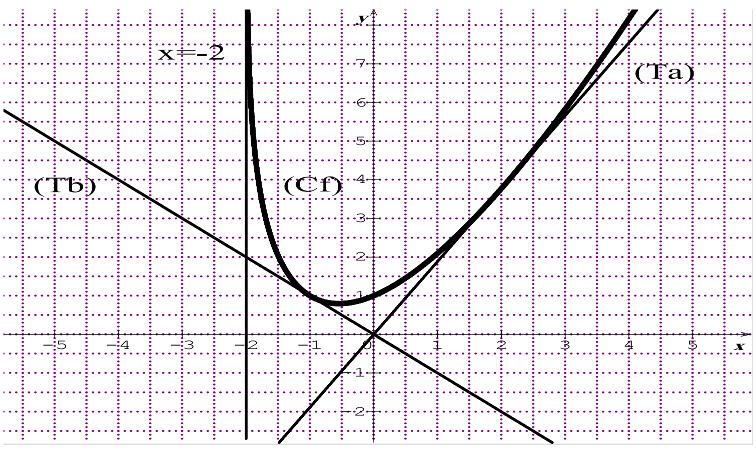
✓ تعيين معادلة (T_a) : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ وبما أنّ $f'(2)=\ln4+\dfrac{1}{2}$ و $f(2)=1+2\ln2$

فإن $y=\left(\ln4+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)+1+2\ln4\Rightarrow\boxed{(T_a):y=\left(\ln4+\dfrac{1}{2}\right)x}$

✓ تعيين معادلة (T_b) : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ وبما أنّ $f'(-1)=-1$ و $f(-1)=1$

فإن $y=(-1)(x+1)+1\Rightarrow\boxed{(T_b):y=-x}$

4) رسم المماسين (T_a) ، (T_b) و (C_f)



حل نموذجي للتمرين السادس

$I-$ g الدالة العددية المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بـ: $g(x)=x^2+1-2\ln x$

1- دراسة تغيرات الدالة g

❖ حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+1-2\ln x=+\infty-\infty \ (F.I)$$ رفعها: $$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\left[\underbrace{x}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2+1-2\ln x=1-2\underbrace{\ln 0^+}_{-\infty}=+\infty$$

❖ حساب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ ولدينا: $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط " $2x^2-2$ " لان المقام موجب تماما وبالتالي: $2x^2-2=0$ تقبل حلين

$x=-1\notin\left]0;+\infty\right[$ مرفوض و $x=1\in\left]0;+\infty\right[$ مقبول

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

g متزايدة تماما على $\left[1;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]0;1\right]$

❖ جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$: من جدول التغيرات $g(x)>2>0$ وحسب خاصية التعدي

نستنتج أن: $g(x)>0$ " $g(x)$ موجبة تماما على $\left]0,+\infty\right[$ "

$II-$ f دالة عددية معرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}(1+2\ln x)$ (C_f) منحناها البياني

1- أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)=\frac{+\infty}{+\infty}\ ...(F.I)$$

رفعها $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}(\underbrace{1+2\ln \overbrace{x}^{0^+}}_{-\infty})=-\infty$$

ب/ تبيان أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ؛ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينـــا:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}(1+2\ln x)+\frac{2}{x}.\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{1+2\ln x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+1+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)>0$ " لأن $g(x)>0$ مما سبق والمقام موجب تماما"

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

❖ تشكيل جدول التغيرات

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) أ/ تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(1+2\ln x)=0$ فان $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضعية النسبيه للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$: لدينا؛ $f(x)-y=\frac{1}{x}(1+2\ln x)=\frac{1+2\ln x}{x}$ المقام موجب تماما معناه اشارة

الفرق من اشارة البسط" $1+2\ln x$ " وبالتالي $1+2\ln x=0$ أي $\ln x=\frac{-1}{2}$ ومنه $x=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$

x	0		$e^{\frac{-1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

ج/ تبيان أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,5<\alpha<0,6$

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0,5;0,6]$ و $f(0,7)\simeq 0,2>0$ ، $f(0,6)\simeq -0,02<0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $]0,6;0,7[$ يحقق $f(\alpha)=0$

2) أ/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(x;2)$ مع $x\geq 1$

نبحث عن الفاصلة x بحيث $f(x)=2$: $x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)=2$ ومنه $\frac{x^2+1+2\ln x}{x}=2$

أي $x^2-2x+1+2\ln x=0$ ومنه $(x-1)^2+2\ln x=0$

معلومة وفائدة: ينعدم مجموع مقادير موجبة الا اذا انعدم كل مقدار على حدا عند نفس القيمه

وعليه $(x-1)^2+2\ln x=0$ معناه $(x-1)^2=0$ أي $x=1 \Leftarrow x-1=0$ و $x=1 \Leftarrow \ln x=0 \Leftarrow 2\ln x=0$

" $2\ln x\geq 0$ لان $x\geq 1$ "

الخلاصة قيمه x هي 1 : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وكون $f'(1)=2$ و $f(1)=2$ فان $(T): y=2x$

ب/ حل المعادلة $x^2.g'(x)-2x.g(x)=0$

$$x^2.g'(x)-2x.g(x)=0 \Rightarrow x^2\left(\frac{2x^2-2}{x}\right)-2x(x^2+1-2\ln x)=0$$
$$\Rightarrow x(2x^2-2-2x^2-2+4\ln x)=0$$
$$\Rightarrow -4+4\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$$

❖ تبيان أن $B\left(e;e+\frac{3}{e}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

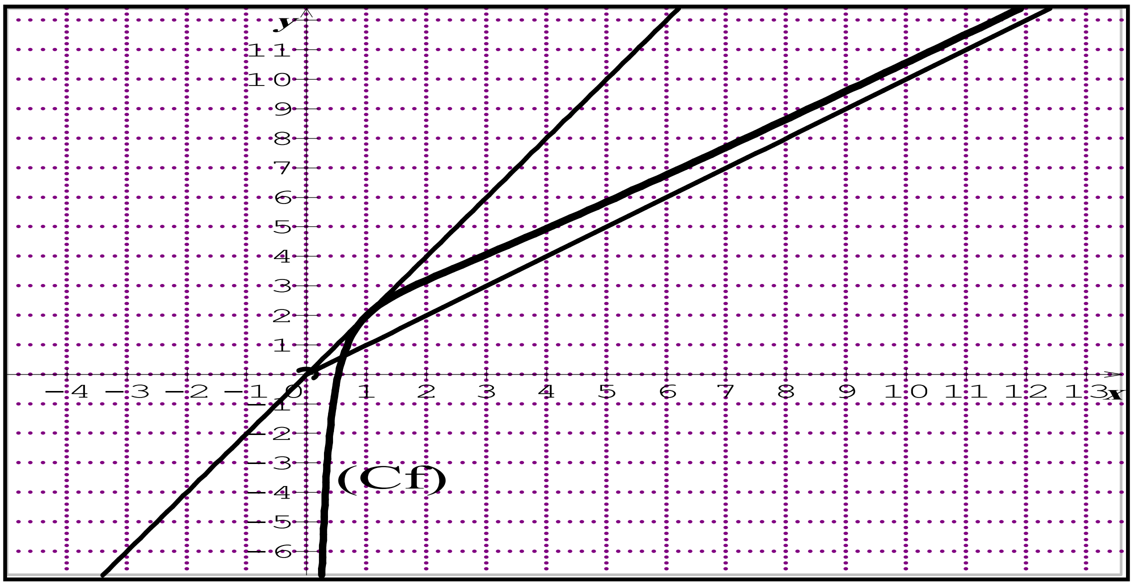
نحسب $f''(x)$: $f''(x)=\frac{g'(x).x^2-2x.g(x)}{x^4}$ ومنه $f''(x)=0$ معناه $x^2.g'(x)-2x.g(x)=0$ من السؤال السابق $x=e$ والاشارة من اشارة " $-4+4\ln x$ " لان المقام موجب تماما

x	0 e $+\infty$
$f''(x)$	‖ $-$ 0 $+$

ومنه النقطة $(e;f(e))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

وبما أن $f(e)=e+\dfrac{3}{e}$ فان $B\left(e;e+\dfrac{3}{e}\right)$

ج/ إنشاء (Δ) ، (T) و (C_f)



حل نموذجي للتمرين السابع

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\dfrac{-1}{2}+\underbrace{\ln 0^+}_{-\infty}=-\infty$ تفسر هندسيا $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} \dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\dfrac{1}{0^+}+\ln 2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} \dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\dfrac{1}{0^-}+\ln 2=-\infty$

تفسر هندسيا $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\underbrace{x-1}_{0}}+\ln(\underbrace{x+1}_{+\infty})=+\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل x من D_f ؛ $f'(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$: f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{-x-1+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x^2-3x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$$

❖ استنتج إشارة $f'(x)$: اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط " $x(x-3)$ " لان المقام موجب تماما على D_f

وعليه نحل المعادلة $x(x-3)=0$ أي $x=0$ او $x=3$

x	-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

❖ تشكيل جدول تغيرات f

x	-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$1,9$	↗	$+\infty$

ج/ تعيين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات الفاصلة 2

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ وكون $f'(2)=\frac{-2}{3}$ و $f(2)=\ln 3$ فان $(\Delta): y=\frac{-2}{3}x+\frac{7}{3}+\ln 3$

3) g دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ/ تبيان أنه من أجل كل x من $]1,+\infty[$: $\frac{x+1}{x}>1$: نبين أن $\frac{x+1}{x}-1>0$

$\frac{x+1}{x}-1=\frac{1}{x}$ وبما ان x من $]1,+\infty[$ فان $\frac{1}{x}>0$ وعليه $\frac{x+1}{x}-1>0$ أي $\frac{x+1}{x}>1$

❖ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$: لدينا $\frac{1}{x-1}>0$ على المجال $]1,+\infty[$ وأيضا $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>0$ "

لان $\frac{x+1}{x}>1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>\ln 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>0$ " ومنه $g(x)>0$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{0}+\ln\left(\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{1}\right)=0$

الاستنتاج: $y=0$ (حامل محور الفواصل) مستقيم مقارب أفقي لـ بجوار $+\infty$

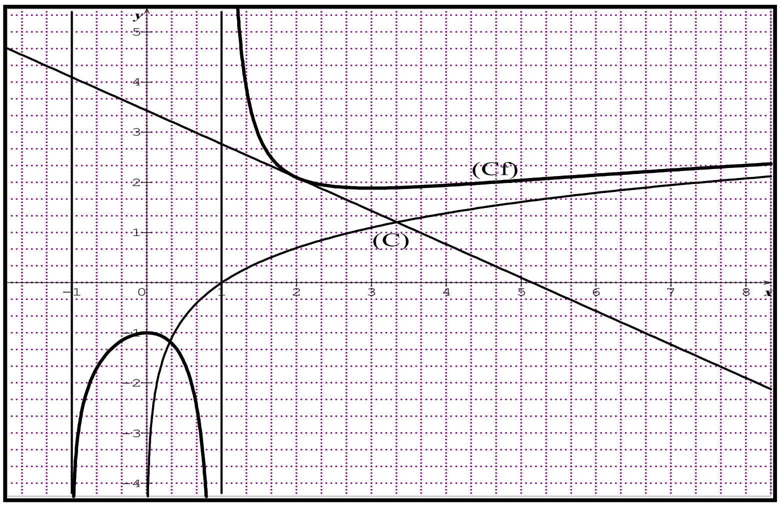
ج/ ندرس اشارة الفرق: $f(x)-\ln x$

$f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)-\ln x=\dfrac{1}{x-1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=g(x)$ ومما سبق $g(x)>0$ ومنه

$f(x)-\ln x>0$ أي (C_f) فوق (C) على المجال $]1,+\infty[$

وأيضا: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=0$ أي ان (C_f) و (C) متقاربان بجوار $+\infty$

د/ ارسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)



4) المناقشة البيانية: $\dfrac{1}{x-1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{m}\right)=0$

$$\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{x+1}{m}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)-\ln|m|=0\Rightarrow\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)=\ln m$$

ومنه $f(x)=\ln m$ " توضيح $m>0$ وعليه $|m|=m$ "

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي ذا المعادلة $y=\ln m$

❖ $\ln m<-1$ أي $0<m<e^{-1}$ يوجد حلين مختلفين في الاشارة

❖ $\ln m=-1$ أي $m=e^{-1}$ يوجد حل مضاعف معدوم

❖ $-1<\ln m<0,5+\ln 4$ أي $e^{-1}<m<e^{0,5+\ln 4}$ لا يوجد حل

❖ $\ln m=0,5+\ln 4$ أي $m=e^{0,5+\ln 4}$ يوجد حل مضاعف موجب

❖ $\ln m>0,5+\ln 4$ أي $m>e^{0,5+\ln 4}$ يوجد حلين موجبين

حل نموذجي للتمرين العاشر

$I-$ المعطيات: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$ و $D_g=]-1,+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g

أ/ حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) = 1 - 2\ln(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) = \frac{-1}{0^+} - 2\ln 0 = -\infty + \infty$ (ح ع ت)

إزالتها: $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x - 2\overbrace{(x+1)\ln(x+1)}^{=0}}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

تذكر دوما: $\lim_{u \xrightarrow{>} 0} u\ln u = 0$ أو إليك هذه أحسن $\lim_{\blacktriangle \xrightarrow{>} 0} \blacktriangle\ln\blacktriangle = 0$

ب/ حساب المشتقة: g قابلة للاشتقاق على D_g ولدينا؛

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{1-2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لان المقام موجب تماما

حل المعادلة $-2x-1=0$ هو $x = \frac{-1}{2} \in D_g$

(حذاري في هذه المرحلة مرات يكون الحل لا ينتمي وفي غفلة منك تضعه داخل جدول الاشارة)

ج/ جدول التغيرات

x	-1		α		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	||		$+$		0		$-$		
$g(x)$	|| $-\infty$		$\nearrow$		$-1+2\ln 2$		$\searrow$		$-\infty$

4) مبرهنة القيم المتوسطة (واضح)

5) حساب $g(0)$؛

6) $g(0)=0$ / ملاحظة: 0 هو أيضا حل للمعادلة $g(x)=0$

استنتاج إشارة $g(x)$ ، للملاحظة $-1+2\ln 2 \approx 0,39 > 0$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

II- المعطيات: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ و $D_f =]-1;0[\cup]0,+\infty[$ (وحدة الطول $2\,cm$)

7) أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (F.I) إزالتها: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}}_{=0}\times\underbrace{\dfrac{x+1}{x^2}}_{=0}=0$

تُفسر هندسيا؛ $y=0$ مقارب أفقي لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{\ln 0}{(-1)^2}=\dfrac{-\infty}{1}=-\infty$ تُفسر هندسيا؛ $x=-1$ مقارب عمودي لـ $\left(C_f\right)$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ (F.I) إزالتها: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\underbrace{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{=1}\times\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{=+\infty}=+\infty$

بنفس الكيفية عند 0 بقيم صغرى: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\underbrace{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{=1}\times\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{=-\infty}=-\infty$

تُفسر هندسيًا : $x=0$ مقارب عمودي لـ $\left(C_f\right)$

تذكر دومًا؛ $\lim\limits_{\blacktriangle\to0}\dfrac{\ln(1+\blacktriangle)}{\blacktriangle}=1$ للفائدة أيضا: $\lim\limits_{\blacktriangle\to1}\dfrac{\ln(\blacktriangle)}{\blacktriangle-1}=1$

8) أ/ f قابلة للاشتقاق على D_f ، ولدينا؛ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

9) $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\times x^2-2x\ln(x+1)}{x^4}=\frac{x\left[\frac{x}{x+1}\times-2\ln(x+1)\right]}{x^4}=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط والمقام معًا كما يوضحه جدول الإشارة التالي:

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

x	-1		α		0		$+\infty$
x^3		$-$		$-$		$+$	
$g(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f'(x)$	||	$+$		$-$	||	$-$	

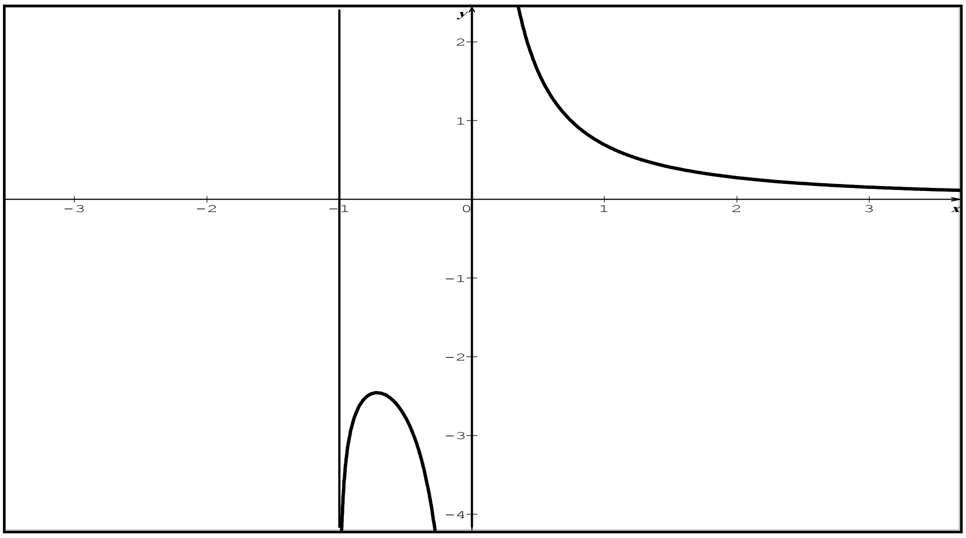
10) تبيان أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ، لدينا $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}\ldots\ldots(1)$

11) نبحث عن عبارة تعوض $\ln(\alpha+1)$ ، لدينا $g(\alpha)=0$ معناه $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0$

ومنه $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2\left(\alpha+1\right)}$.....(2) نعوض (2) في (1) نجد $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

إعطاء قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ علما أن: $\alpha\approx -0,715$؛ $f(\alpha)\approx -2.454$

12) إنشاء $\left(C_f\right)$



حل نموذجي للتمرين الثاني عشر

$I-$ المعطيات: $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ و $D_g=\left]0,+\infty\right[$

1) حساب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x\right)=+\infty-\infty$ (**F.I**) إزالتها: $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{\ln x}{x^2}}\right)}_{=1/2}=+\infty\times\dfrac{1}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x\right)=0-\underbrace{\ln 0^+}_{=-\infty}=+\infty$ لا توجد (ح ع ت)

2) */ حساب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على D_g ولدينا: $g'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$

*/ استنتاج اتجاه تغير الدالة g : إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لان المقام موجب تماما على D_g وعليه

$x^2-1=0$ تقبل حلين هما $x=1$ و $x=-1\notin D_g$ (مرفوض)

g متزايدة تماما على $\left]1;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left]0;1\right[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

*/ جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتاج أنه من أجل كل x من $\left]0,+\infty\right[$ ؛ $g(x) \geq \frac{1}{2}$

من خلال جدول التغيرات نستنتج أن $\frac{1}{2}$ قيمة حدية صغرى للدالة g

وبالتالي $g(x) \geq \frac{1}{2}$

II– المعطيات $D_f = \left]0,+\infty\right[$ و $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x}$

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\left]0,+\infty\right[$ ؛ $f'(x) = \frac{1+g(x)}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ ولدينا،

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1+\overbrace{\frac{1}{2}x^2 - \ln x}^{=g(x)}}{x^2} = \frac{1+g(x)}{x^2}$$

2) دراسة تغيرات الدالة f

*/ حساب النهايتين

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

*/ اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط $1+g(x)$ وكون $g(x) \geq \frac{1}{2}$ فان $1+g(x) \geq \frac{3}{2} > 0$ وحسب خاصية التعدي

نستنتج $1+g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

*/ جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بيّان أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فان $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل

لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$ لدينا: $f(x)-y = \frac{1}{2}x > 0$ لان $x \in \left]0;+\infty\right[$ ومنه (C_f) فوق (D)

5) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

*/ نحسب $f''(x)$

$$f''(x)=\frac{g'(x).x^2-2x(1+g(x))}{x^4}=\frac{\frac{x^2-1}{x}.x^2-2x(1+\frac{1}{2}x^2-\ln x)}{x^4}$$
$$=\frac{x^3-x-2x-x^3+2x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

*/ نحل المعادلة $f''(x)=0$ ؛ $\frac{-3+2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow -3+2\ln x=0\Rightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

*/ اشارة $f''(x)$:

x	0 $\qquad$ $e\sqrt{e}$ $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$\|$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

ومنه النقطة $\omega\left(e\sqrt{e}\,;f\left(e\sqrt{e}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

7) أ/تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ميله يساوي $\frac{1}{2}$

نحل المعادلة $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1+g(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 1+\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0=\frac{1}{2}x_0^2\Rightarrow \ln x_0=1\Rightarrow x_0=e$

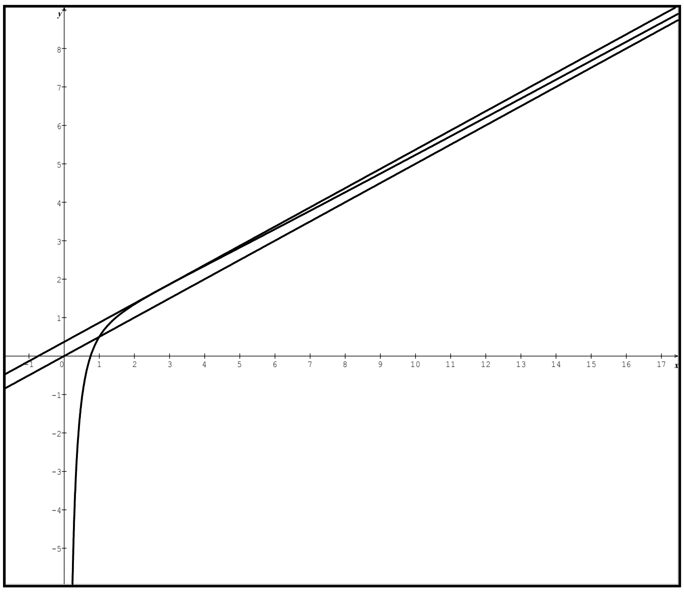
ب/ كتابة معادلة (Δ) ؛ $y=f'(e)(x-e)+f(e)$ وبما أن $f'(e)=\frac{1}{2}$ و $f(e)=\frac{1}{2}e+\frac{1}{e}$ فان

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{e}$$

7) اثبات أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_1 حيث: $\frac{1}{2}<x_1<1$

مبرهنة القيم المتوسطة (واضح)

9) انشاء (Δ) و (C_f) (تؤخذ $2\,cm$ وحدة للطول)



9) المناقشة البيانية: $f(x)=\frac{1}{2}x+m$

*/ $m\le 0$ يوجد حل وحيد

*/ $0<m<\frac{1}{e}$ يوجد حلين

*/ $m=\frac{1}{e}$ يوجد حل وحيد

*/ $m>\frac{1}{e}$ لا يوجد حلول

حل نموذجي للتمرين الثالث عشر

$I-$ المعطيات: $D_g = \left]0;+\infty\right[$ ، $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

(ح ع ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = +\infty - \infty$ إزالتها: $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x}_{=-\infty}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 1$ لان : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 \ln x = 0$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : g قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$

ولدينا؛ $g'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2.\dfrac{1}{x} = -4x\ln x$ نحل المعادلة: $g'(x) = -4x\ln x = 0$

اما $-4x = 0$ معناه $x = 0$ أو $\ln x = 0$ معناه $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$-4x$	‖	$-$	|	$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

*/ جدول التغيرات

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0		$-$		
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$			$-\infty$

3) أ/تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث: $1,8 < \alpha < 1,9$ مبرهنة القيم المتوسطة (واضح)

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$II-$ المعطيات $D_f = \left]0;+\infty\right[$ ، $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$ ، تفسر هندسيا $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

2)تبيان أنه من أجل كل x من المجال $\left]0;+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

f قابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ ولدينا؛

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x}}{(1+x^2)^2}=\frac{\overbrace{1+x^2-2x^2\ln x}^{=g(x)}}{x(1+x^2)^2}=\frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}\ \#$$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ؛ اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط $g(x)$

وعليه: f متزايدة تماما على $\left]0;\alpha\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\alpha;+\infty\right[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

3) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[1;+\infty\right[$ ، $0\le f(x)\le\frac{\ln x}{x^2}$

*/ من أجل كل x من $\left[1;+\infty\right[$: $\ln x\ge 0$ وبالتالي $0\le f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$ .....(1)

*/ نحسب الفرق $f(x)-\frac{\ln x}{x^2}$ ، لدينا $f(x)-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{1+x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2(1+x^2)}\le 0$

لان: $-\ln x\le 0$ ومنه $f(x)-\frac{\ln x}{x^2}\le 0$ وبالتالي $f(x)\le\frac{\ln x}{x^2}$.....(2)

من (**1**) و(**2**) نستنتج أن $0\le f(x)\le\frac{\ln x}{x^2}$

*/ استنتاج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ؛ $\underbrace{\lim_{x\to+\infty}0}_{=0}\le\lim_{x\to+\infty}f(x)\le\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}}_{=0}$ حسب مبرهنة الحصر فان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) تبيان أن $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$.....(1)

ومن جهة أخرى $g(\alpha)=1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0\Rightarrow\ln\alpha=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$.....(2)

بتعويض (**2**) في (**1**) نجد $f(\alpha)=\frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}\ \#$

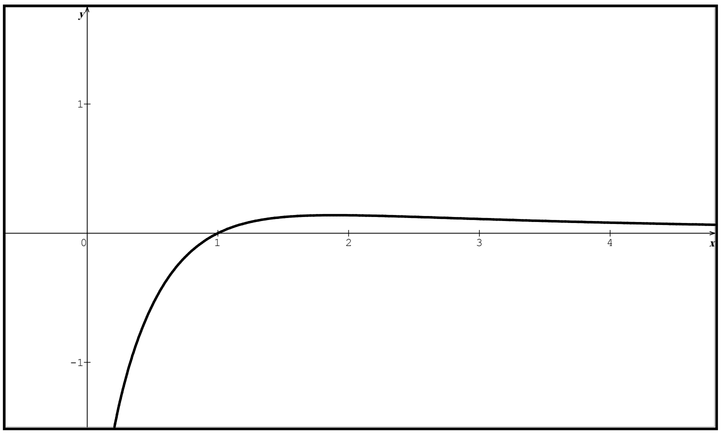
*/ حصر

العدد $f(\alpha)$ ؛ $1,8<\alpha<1,9\Rightarrow 2.(1,8)^2<2\alpha^2<2.(1,9)^2\Rightarrow\frac{1}{2.(1,9)^2}<\frac{1}{2\alpha^2}<\frac{1}{2.(1,8)^2}$

5) جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

*/ رسم المنحنى (C_f)



حل نموذجي للتمرين السادس عشر

$I-$ المعطيات: $D_g = \left[0;+\infty\right[$ و $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1) أ/ حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,3$

التحقق من أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{2x^2}{x^2+1}}_{=2} - \underbrace{\ln(x^2+1)}_{=+\infty} = -\infty$

ب/ اكمال جدول تغيرات الدالة g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$0,3$	$\searrow$	$-\infty$

2) أ/ */ g مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $\left]1;+\infty\right[$

*/

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $g(1) = 0,3 \Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \times g(1) < 0$

ومنه (ح م ق م) يوجد حل وحيد α في المجال $\left]1;+\infty\right[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

التحقق من أن ؛ $1,9 < \alpha < 2$: نبيّن فقط أن $g(1,9) > 0$ و $g(2) < 0$

ب/ استنتاج اشارة $g(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$

II- المعطيات: $D_f = \mathbb{R}$ و $f(0) = 0$ و $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

1) تبيان أن : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$: نهاية شهيرة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1$

*/ تفسر النتيجة هندسيا: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ ؛ f قابلة للاشتقاق عند 0

2) أ/ تبيان أن f دالة فردية: نبيّن أن $f(-x) = -f(x)$ لدينا:

$f(-x) = \dfrac{\ln((-x)^2+1)}{-x} = -\underbrace{\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}}_{=f(x)} = -f(x)$ ومنه f دالة فردية

ب/ تبيان أن: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$: (ح ع ت) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

ازالتها:نضع $t = \dfrac{1}{x}$ ومنه $x^2 = \dfrac{1}{t^2}$ ولما $x \to +\infty$ فان $t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)}{\dfrac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+} t\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{t\ln(t^2+1)}_{=0} - 2\underbrace{t\ln t}_{=0} = 0$$

ملاحظة مهمة : $t\ln t^2 = 2t\ln|t|$ لكن $t \to 0^+$ فكانت $|t| = t$

*/ استنتاج $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$: بنفس الكيفية نجد $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ ما عدا $t\ln t^2 = 2t\ln(-t)$

3) أ/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا؛ # $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}.x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{\dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$ وبما أن: $f'(0)=1$

و $f(0)=0$ فان $y = x$

5) أ/تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ لدينا: $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$....(1)

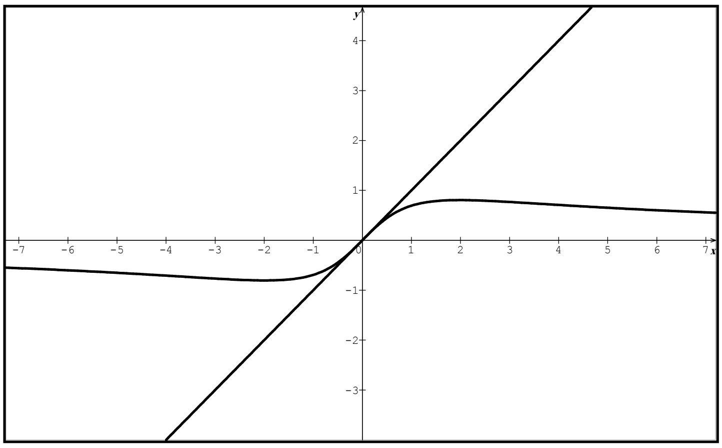
ومن جهة أخرى (2).....$g(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}-\ln(\alpha^2+1)=0 \Rightarrow \ln(\alpha^2+1)=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

نعوض $(\mathbf{2})$ في $(\mathbf{1})$ نجد المطلوب $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

*/حصر العدد $f(\alpha)$: $1,9<\alpha<2 \Rightarrow 3,8<2\alpha<4$ وأيضا $1,9^2+1<\alpha^2+1<2^2+1$

ومنه $\dfrac{3,8}{2^2+1}<\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}<\dfrac{4}{1,9^2+1}$

ب/انشاء المماس (Δ) و المنحنى (C_f)



حل نموذجي للتمرين التاسع عشر

$I-$ المعطيات: $D_g=\left]0,+\infty\right[$ و $g(x)=x^2-1+2\ln x$

1) حساب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2-1+2\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1+2\ln x=+\infty$

2) حساب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على D_g ولدينا: $g'(x)=2x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2+2}{x}>0$

لان المقام موجب تماما والبسط ايضا ومنه g متزايدة تماما على D_g

*/ جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتاج أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في المجال $]0,+\infty[$: بالحساب فقط نجد $g(1)=0$ وبما أن g رتيبة تماما (متزايدة تماما) فان 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$

4) استنتاج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

$II-$ المعطيات: $D_f=]0,+\infty[$ و $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

1) حساب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

*/ (ح ع ت) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x-\dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty+\infty$ ازالتها $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\underbrace{\ln x}_{=-\infty}\left(\underbrace{1-\dfrac{1}{x^2}}_{=-\infty}\right)=(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\cancel{\dfrac{\ln x}{x^2}}=+\infty$

2) اثبات أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ فان: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ ، f قابلة للاشتقاق على D_f

ولدينا ؛ # $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\frac{1}{x}.x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{\overbrace{x^2-1+2\ln x}^{=g(x)}}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$

3) */استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f : اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ لان المقام موجب تماما على D_f

ومنه f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;1]$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$

*/ جدول التغيرات

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

4) أ/ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x^2}=0$$

*/ تفسر النتيجة هندسيا: المنحنيان (C_f) و (Γ) متقاربان عندما x يؤول لـ $+\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

بالنسبة (C_f) ندرس اشارة الفرق؛ $f(x)-\ln x=\dfrac{-\ln x}{x^2}$: والاشارة من اشارة البسط $-\ln x$ معناه معاكسة لاشارة $\ln x$ التي تنعدم عند 1

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	||	$+$	0	$-$	

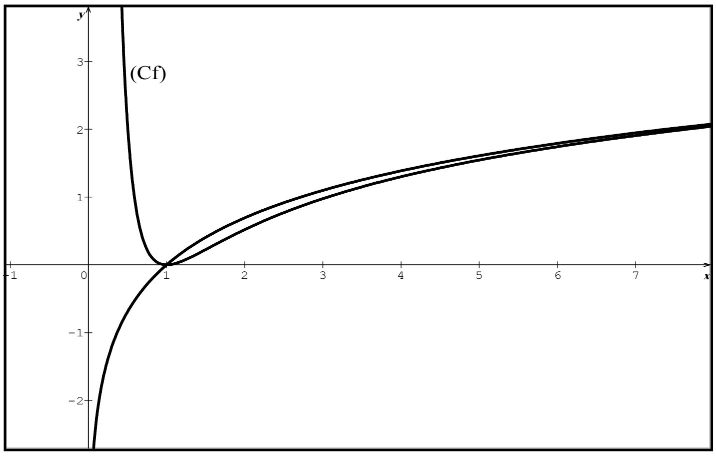
*/ (C_f) فوق (Γ) لما $x\in\left]0;1\right[$

*/ (C_f) تحت (Γ) لما $x\in\left]1;+\infty\right[$

*/ (C_f) يقطع (Γ) عند النقطة $(1;0)$

5) رسم (C_f) و (Γ) في نفس المعلم

6) المناقشة البيانية



$$x^2\ln x-mx^2-\ln x-2x^2=0$$
$$\Rightarrow x^2\ln x-\ln x-2x^2=mx^2$$
$$\Rightarrow \ln x-\frac{\ln x}{x^2}-2=m$$
$$\Rightarrow \ln x-\frac{\ln x}{x^2}=m+2$$
$$\Rightarrow f(x)=m+2$$

*/ $m+2<0 \Leftarrow m<-2$ لا يوجد حلول

*/ $m+2=0 \Leftarrow m=-2$ يوجد حل مضاعف

*/ $m+2>0 \Leftarrow m>-2$ يوجد حلين

حل نموذجي للتمرين الرابع والعشرون

$I-$ g الدالة المعرفة على $D_g=\left]-1,+\infty\right[$ و $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

بقراءة بيانية

1) تشكيل جدول تغيرات g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||		$+$		
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]-1,+\infty\right[$

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

$II-$ المعطيات: f $D_f=\left]-1,+\infty\right[$ و $f(x)=x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أ/حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-1-\dfrac{\ln 0^+}{0^+}=+\infty$

*/ تفسّر النتيجة هندسياً: $x=-1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ باستخدام النتيجة: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ ، برهان أن: $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

نضع $x = \frac{1}{t}$ لما $t \to +\infty$ فان $x \to 0^+$ وتصبح النهاية كما يلي:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0 = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -\underbrace{x\ln x}_{=0} = 0$$

ج/ باستخدام النتيجة: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ ، برهان أن: $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$

نضع $t = e^x$ لما $t \to +\infty$ فان $x \to +\infty$ وتصبح النهاية كما يلي:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{=+\infty}} = 0$$

د/ استنتاج، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} x - \cancel{\frac{\ln(x+1)}{x+1}} = +\infty$

2) أ/ حساب: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0$

*/ الاستنتاج: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = \frac{-\ln(x+1)}{(x+1)}$ المقام موجب تماما على D_f ، وعليه ندرس اشارة البسط

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$	||	$+$	0	$-$	

*/ (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \left]-1;0\right[$

*/ (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \left]0;+\infty\right[$

*/ (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(0;0)$

3) *تبيان أنه من أجل كل x من $\left]-1,+\infty\right[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$: f قابلة للاشتقاق على D_f

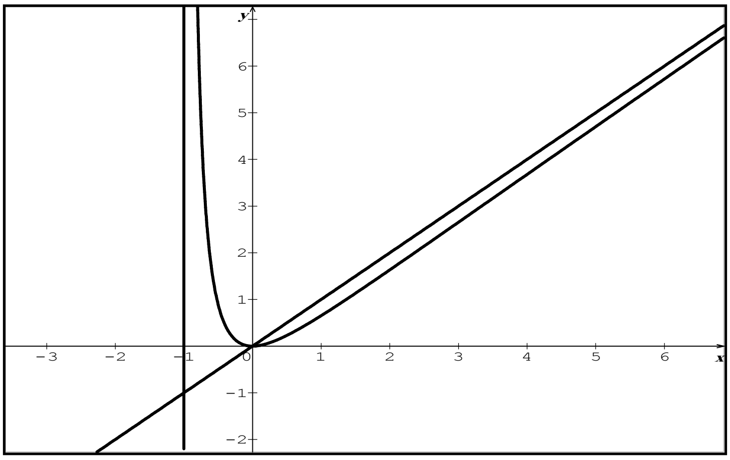
ولدينا: $$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}.(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \quad \#$$

*/ جدول التغيرات:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) رسم (Δ) والمنحنى (C_f)



حل نموذجي للتمرين الثامن والعشرون

$I-$المعطيات: $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ و $g(x) = x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2|$

أ/ دراسة تغيرات الدالة g

*/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2| = +\infty + \underbrace{\ln|-\infty|}_{=+\infty} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2| = +\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x) = -1 + \underbrace{\ln 0^+}_{=-\infty} = -\infty$$

*/ حساب المشتقة: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ ولدينا $g'(x) = 2x - 4 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x^2 - 8x + 9}{x-2}$

نحل المعادلة $g'(x) = 0$ ؛ $\dfrac{2x^2 - 8x + 9}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 9 = 0$ ومنه $\Delta = -8 < 0$ البسط لا ينعدم

واشارته موجبة تماما وعليه،جدول التغيرات يكون كالتالي:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

ب/ حساب $g(3)$ ، $g(1)$: $g(3) = g(1) = 0$

*/ استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$II-$ المعطيات: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ و $f(x) = 2 - x + \dfrac{\ln|x-2|}{x-2}$

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} 2 - x + \underbrace{\frac{\ln|x-2|}{x-2}}_{=0} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} 2 - x + \underbrace{\frac{\ln|x-2|}{x-2}}_{=0} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} 2 - x + \frac{\ln|x-2|}{x-2} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} 2 - x + \frac{\ln|x-2|}{x-2} = \frac{\ln 0^+}{0^-} = +\infty$$

*/تُفسر النتيجتين الأخيرتين: $x = 2$ مقارب عمودي لـ(C_f)

2) اثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ ، f قابلة للاشتقاق على D_f

ولدينا: # $$f'(x) = -1 + \frac{1 - \ln|x-2|}{(x-2)^2} = \frac{-\left(\overbrace{x^2 - 4x + 3 + \ln|x-2|}^{=g(x)}\right)}{(x-2)^2} = -\frac{g(x)}{(x-2)^2}$$

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :اشارة$f'(x)$ معاكسة لاشارة$g(x)$

*/ جدول التغيرات :

x	$-\infty$ 1 2	2 3 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(1)$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $f(3)$ ↘ $-\infty$

4) اثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

بما أن $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{\ln|x-2|}{x-2} = 0$ فان $y = -x + 2$ مقارب مائل لـ بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = \dfrac{\ln|x-2|}{x-2}$

$$\frac{\ln\left|x-2\right|}{x-2}=0 \Rightarrow \ln\left|x-2\right|=0 \Rightarrow \left|x-2\right|=1$$

يكافئ:

اما $x-2=1$ ومنه $x=3$ أو $x-2=-1$ ومنه $x=1$

x	$-\infty$ 1 2 3 $+\infty$
$x-2$	$-$ | $-$ 0 $+$ | $+$
$\ln\left\|x-2\right\|$	$+$ 0 $-$ ‖ $-$ 0 $+$
$f(x)-y$	$-$ 0 $+$ ‖ $-$ 0 $+$

*/ (C_f) فوق (Δ) على المجالين $]1;2[$ و $]3;+\infty[$

*/ (C_f) تحت (Δ) على المجالين $]-\infty;1[$ و $]2;3[$

*/ (C_f) يقطع (Δ) عند النقطتين $(1;1)$ و $(3,-1)$

6) برهان على وجود مماسين للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما -1

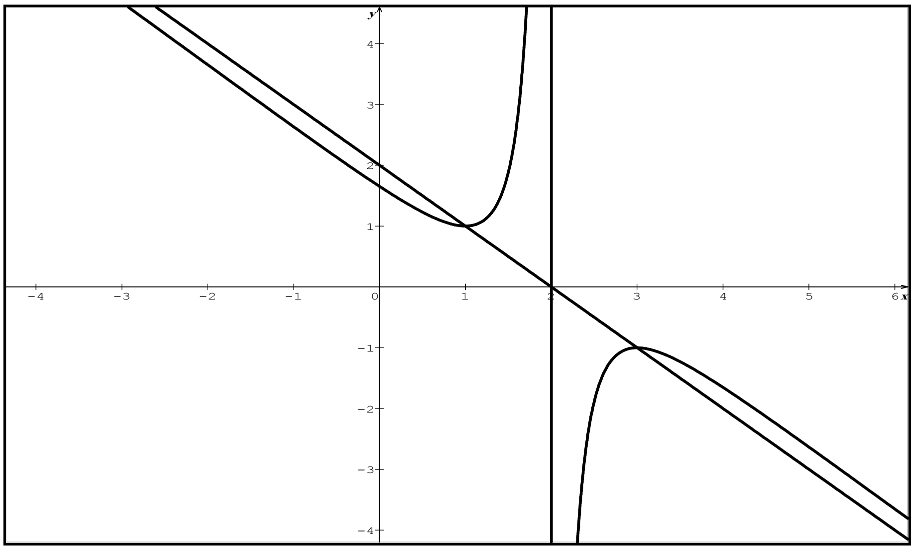
نبيّن أن للمعادلة $f'(x_0)=-1$ حلين

$$-\frac{g(x_0)}{(x_0-2)^2}=-1 \Rightarrow x_0^2-4x_0+4=x_0^2-4x_0+3+\ln\left|x_0-2\right|$$

$$\Rightarrow \ln\left|x_0-2\right|=1 \Rightarrow \left|x_0-2\right|=e$$

ومنه اما $x_0-2=e$ وبالتالي $x_0=e+2$ أو $x_0-2=-e$ وبالتالي $x_0=2-e$

7) انشاء (Δ) و $\left(C_f\right)$



حل نموذجي للتمرين الثلاثون

المعطيات : $D_f=\left]-1;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ و $f(x)=\ln\frac{x^2}{x+1}$

1) *تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\ln x=\ln(+\infty)=+\infty$

*/ حساب ، $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln \frac{x^2}{x+1} = \ln \frac{1}{0^+} = +\infty$ ، تُفسر هندسيا $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

*/ حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$

*/ تُفسر هندسيا $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

2) تبيّان أنه من أجل كل x من D_f ؛ $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$

f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا: # $f'(x) = \frac{\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}}{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{x(x+2)}{x^2(x+1)} = \frac{x+2}{x(x+1)}$

3) */استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1	0	$+\infty$
$x+2$	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$

*/ جدول التغيرات

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4) أ/ استنتاج من جدول التغيرات أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة على D_f

*/ على المجال $]-1;0[$ ؛ f مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) وصورة المجال $]-1;0[$ بالدالة f هو $\mathbb{R}$

وبالتالي (ح م ق م) يوجد حل وحيد وسالب للمعادلة $f(x) = k$ حيث k من $\mathbb{R}$

*/ بنفس الكيفية على المجال الثاني $]0;+\infty[$ نبرهن وجود حل موجب

الخلاصة: للمعادلة $f(x) = k$ حلين مختلفين في الاشارة

ب/ تبيان أنه إذا كان $f(\alpha) = f(\beta)$ فإن $\alpha + \beta - \alpha\beta = 0$ مع α و β عددين مختلفين من D_f

$f(\alpha) = f(\beta)$ معناه $\ln \frac{\alpha^2}{\alpha+1} = \ln \frac{\beta^2}{\beta+1}$ يكافئ

$$\beta^2\alpha + \beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha^2 = 0 \Leftarrow \beta^2(\alpha+1) - \alpha^2(\beta+1) = 0 \Leftarrow \frac{\alpha^2}{\alpha+1} = \frac{\beta^2}{\beta+1}$$

$$\alpha\beta(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 0 \Leftarrow$$

$$\underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0}\left[\alpha + \beta + \alpha\beta\right] = 0 \Leftarrow$$

$$\# \qquad \alpha + \beta + \alpha\beta = 0 \Leftarrow$$

ج/حساب $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$: $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \ln \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1} = \ln 1 = 0$

*/استنتاج فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل: لدينا $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

ومنه $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ لايجاد الفاصلة الثانية نستعمل السؤال السابق

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(-1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}$$

بالضرب في المرافق والتبسيط نجد الفاصلة الثانية: $\beta = -2 + \sqrt{5}$

5) بيّان أن (C_f) يقبل مماسا (Δ) يعامد المستقيم ذا المعادلة $3y = -2x$، يطلب تعيين معادلته

فائدة: المستقيمان المتعامدان جداء ميلهما يساوي -1

*/ ميل المستقيم (Δ) يساوي $\frac{-2}{3}$ وبالتالي نحل المعادلة $\frac{-2}{3}.f'(x_0) = -1$

لدينا : $\frac{-2(x_0+2)}{3x_0(x_0+1)} = -1 \Rightarrow -2x_0 - 4 = -3x_0^2 - 3x_0 \Rightarrow 3x_0^2 + x_0 - 4 = 0$

المستقيم (Δ) يساوي نحسب المميز Δ ، $\Delta = 49 > 0$ يوجد حلين مختلفين: اما $x_0 = -\frac{4}{3} \notin D_f$ مرفوض

واما $x_0 = 1$ مقبول

*/ كتابة معادلة المماس (Δ)، لدينا $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ وبما ان $f'(1) = \frac{3}{2}$ و $f(1) = -\ln 2$

فان $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - \ln 2$

6) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$

7) ماذا يمكن القول عن (C_f) و (Γ) ؟ حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة " $\ln$ "

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x^2}{x+1}-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}=0$

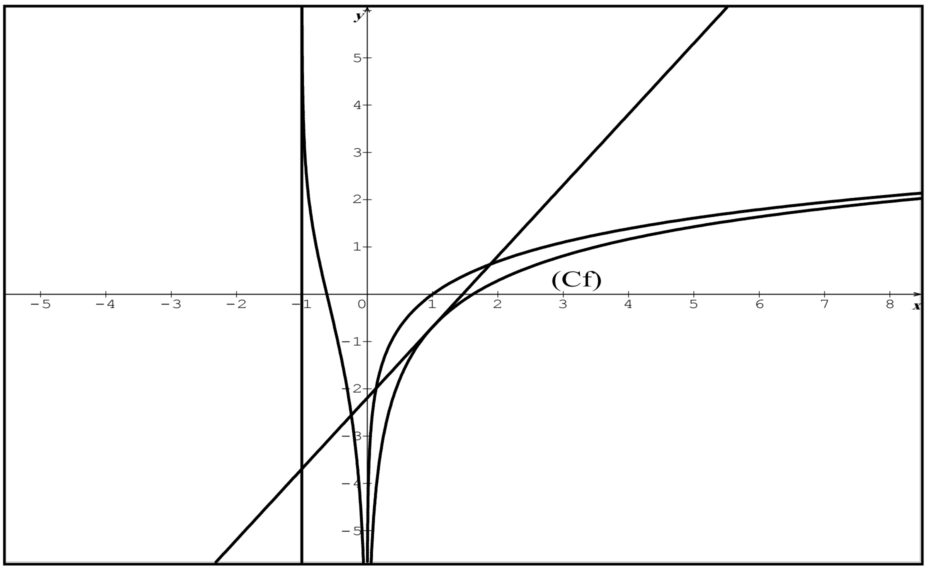
(C_f) متقاربان (Γ) عندما x يؤول الى $+\infty$

8) تحديد وضعية (C_f) و (Γ)

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-\ln x=\ln\frac{x}{x+1}$ وبما أن $0<\frac{x}{x+1}<1$ لان البسط أقل من المقام دوما

فان $\ln\frac{x}{x+1}<0$ وبالتالي (C_f) تحت (Γ) على $\left]0;+\infty\right[$

*/ رسم (Γ) ، (Δ) و (C_f)



❖ جمع وكتابة الأستاذ : محمد حاقة

ختاما أقول

وهكذا لكل بداية نهاية ، وخير العمل ما حسن آخره وخير الكلام ما قل ودل وبعد هذا الجهد المتواضع أتمنى أن أكون موفقا في سردي للعناصر السابقة سردا لا ملل فيه ولا تقصير موضحا ما كان يشكل عائقا أمام طلبتي الأعزاء لهذا الموضوع الشائق الممتع ، وفقني الله وإياكم لما فيه صالحنا جميعا